Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media

Difficulties in secondary students' learning and initial use of functions.

Eduar Miguel Gómez Guerra, Hernán Emilio Hernández Paternina, Alfonso Eduardo Chaucanés Jácome
Departamento de Matemáticas, Grupo de Investigación: Pensamiento Matemático (PEMA), Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia,
Edumigomat77@Gmail.com, nancho18900@Gmail.com, chaucane@yahoo.com

***Resumen*— En este artículo se reportan los hallazgos de una investigación que tuvo como objetivo analizar las dificultades de los estudiantes al hacer transformaciones entre registros de representación de una función. Se hizo un estudio descriptivo de casos con un grupo de estudiantes de una institución educativa del sector rural colombiano. Se concluye que los estudiantes tienen dificultad con la identificación y uso de los elementos de la función, con la consecución del patrón de regularidad y de crecimiento, la elaboración de un modelo de la situación y en el uso del concepto de ecuación para encontrar una incógnita**

***Palabras clave*— funciones, patrón de regularidad, registros, representación semiótica.**

***Abstract*— In this article it reports the findings of an investigation that aimed to analyze the difficulties of students the do transformations between records of representation of a function. Was made a descriptive study of cases with a group of students from an educational institution of the Colombian rural sector. It is concluded that students have difficulty with the identification and use of the elements of the function, with the attainment of steadiness and growth pattern, the development of a model of the situation and in the use of the concept of equation to find unknown.**

***Key Word* — Functions, pattern regularity, records, representation semiotics**

I. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las funciones ha mostrado ciertas complicaciones a través de la historia de la humanidad, lo que no deja de ser preocupante ya que una mala concepción de este concepto podría redundar en un bajo rendimiento en el aprendizaje del cálculo. Y el cálculo reúne una gran cantidad de subtemas que están íntimamente relacionados, lo que según [1] permite inferir que un manejo pobre de algunos de estos subconceptos puede impedir el desarrollo profundo de sus conceptos asociados, por lo que sería deseable que se promovieran conexiones entre nociones asociadas, que faciliten el acceso al cálculo.
[2] consideran el concepto de función como uno de los pilares más importantes para el acceso al cálculo y la modelación de situaciones y fenómenos en varios ámbitos profesionales y de la ciencia, de modo que los resultados de aprendizaje y los procesos desarrollados en distintas ciencias pueden verse afectados por una inadecuada conceptualización y aplicación de este concepto. Por lo tanto, se hace necesario conocer y entender las causas que dificultan en los estudiantes su construcción a través de experiencias significativas.
[3] Considera que "poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional", pues la interacción con situaciones funcionales y su aplicabilidad en diversos campos y aspectos de la vida, puede permitir al educando un avance en su desarrollo, por cuanto tiene la posibilidad de asignarle significado y sentido a los contenidos trabajados en relación con dicho pensamiento [4]. En este mismo sentido [5] afirma que para contribuir al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional se requiere del desarrollo de saberes básicos como el análisis de funciones. Esto porque el concepto de función, es uno de los conceptos matemáticos de mayor aplicabilidad en la vida de los hombres, por cuanto permite relacionar esta área con otras del currículo y modelar situaciones de la vida real.

En relación a lo anterior [6] manifiesta que lo que se quiere es desarrollar en el estudiante una forma de pensamiento que identifique de manera natural, fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos, es decir, no solamente identificar la matemática en situaciones reales y contextualizadas, sino que tenga la capacidad de modelar matemáticamente esa situación. Según estos autores, uno de los elementos centrales a considerar es la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones, abordar situaciones que requieran nociones intuitivas de aproximación a conceptos fundamentales de la matemática.
[7] considera como fundamental en la comprensión de un concepto matemático la coordinación entre los diferentes registros disponibles de dicho objeto. Desde este punto de vista, no solo es importante entender y atender las dificultades al manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de transformación tipo conversión o tipo tratamiento entre representaciones que se proponen a los estudiantes. [8] considera que también es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de las otras cuando se

Fecha de Recepción: 31 de Mayo de 2015
Fecha de Aceptación: 16 de Septiembre de 2015

está promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático. Además, hay que tener presente que "la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos" [9], pero a su vez, una de las más importantes para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos.

En este artículo se reportan los hallazgos de una investigación que tuvo como objetivo analizar las dificultades más comunes de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento con los elementos de una función. A los estudiantes se les pidió identificar y relacionar los elementos de la función, modelarla, describir los procesos realizados al dar una respuesta solicitada, encontrar el valor de la incógnita dado el de la función, identificar y usar el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación y construir una representación gráfica.

II. CONTENIDO

A. Marco de referencia

El aprendizaje conceptual de las matemáticas ha sido un requisito en el desarrollo de la humanidad, por ser extrapolable a diversos contextos. Esto ha incentivado a educadores matemáticos e investigadores en educación matemática a establecer algunos acuerdos, llevándolos a sugerir formas de organizar las secuencias de actividades utilizadas en clases, que es una necesidad el análisis de las producciones de los estudiantes que permitan utilizar sus dificultades de comprensión en beneficio de su propio aprendizaje; además, estrategias, recursos y el tipo de problemas que se deben utilizar en matemáticas para despertar en los estudiantes su interés por el estudio, de tal forma que se favorezca su aprendizaje. En este sentido [10] sugieren que el professor debería:

- ❖ Comprometer a los estudiantes en el discurso matemático que amplía su comprensión de la resolución de problemas y su capacidad para razonar y comunicarse matemáticamente.
- ❖ En la evaluación de la enseñanza de conceptos, procedimientos y conexiones, proporcionar evidencia de que representa las matemáticas como una red de conceptos y procedimientos interconectados, donde se enfatizan las conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas y las relaciona con la vida diaria.
- ❖ Estimula a que los estudiantes extraigan y validen sus propias conclusiones;
- ❖ Selecciona las tareas que permitan a los estudiantes construir nuevos significados mediante la construcción y la extensión de su conocimiento previo (p.111).

En este mismo sentido [11] manifiesta que:

> Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana (…) El pensamiento variacional se puede desarrollar en los estudiantes al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de las secuencias. Esto desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de un patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula (…) Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica (p. 67).

En lo planteado tanto por [10], como [11] se puede apreciar que el papel de los contextos y los registros de representación juegan un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, para que en el desarrollo de actividades socialmente compartidas, puedan asignar significados y sentido a los conceptos que se trabajan.

Para [4] los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permiten proponer problemas interesantes que facilitan el análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes, los que pueden ser usados para mejorar sus procesos de aprendizaje. Las representaciones semióticas son producciones del sujeto con el uso de símbolos, que son remitidas a un sistema particular de signos y reproducidas en un registro determinado [7]. Hay elementos fundamentales en esta teoría, que pueden dinamizar o inhibir los aprendizajes de los estudiantes. Entre estos elementos tenemos: el uso de diversos registros de representación semiótica de un mismo objeto, la diferenciación entre representante y representado y la homogeneidad entre las representaciones, determinantes de la congruencias o incongruencias entre los diferentes registros disponibles del objeto.

Para [9] es indispensable la transformación de una representación semiótica en otra representación semiótica para que un objeto pueda ser codificado/decodificado y así tener la posibilidad de ser comprendido por alguien en este proceso de realizar transformaciones. [9] distingue dos tipos de transformaciones: el *tratamiento*, que es una transformación al interior de un registro determinado, el cual se realiza con cierta homogeneidad en la representaciones en juego, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es decodificar una representación en un registro y codificarlo en otro. En este sentido [4] consideran que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruentes o no, esto es, puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro. Y que además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro.

Para [9], si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente la heterogeneidad entre representaciones. Además, que para que una representación funcione como tal en el sujeto se necesitan dos condiciones esenciales: 1) se necesita de al menos dos registros semióticos para producir alguna representación de ese objeto y 2) que el sujeto realice conversiones de un registro a otro sin siquiera notarlo [12]. Y un elemento fundamental en el éxito del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es conocer el origen de las transformaciones; esto es, si son transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento, que faciliten el análisis cognitivo de las dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Las producciones de los estudiantes son muy buena fuente para el análisis de sus procesos de comprensión, con las que de ser utilizadas apropiadamente, se podrían entender sus necesidades de aprendizaje y partir de ahí ayudarlos a minimizar sus errores conceptuales. [13] manifiestan que:

> Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja (p.69).

En lo planteado por [13] se evidencia la necesidad del error en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes para que puedan distinguir lo correcto de lo incorrecto, al remplazar concepciones arraigadas con el tiempo, por concepciones nuevas, luego de confrontarlas y ponerlas a prueba en contextos donde han requerido hacerlo.

B. Metodología

En la investigación se hizo un estudio descriptivo de casos, donde se analizaron las producciones de los estudiantes al hacer transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento con los elementos de una función; además, se especifican las características que asume el objeto de estudio para los participantes en la investigación [16]. Lo que constituye un modo particular de indagar, ver, analizar, comprender y conceptualizar la realidad del fenómeno en estudio, esto es, las dificultades presentadas por los estudiantes en la identificación de los elementos de una función, al modelar una relación funcional, las que presentan al utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita, o las dificultades al describir los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas planteadas.

La investigación se desarrolló en cuatro etapas fundamentales: revisión documental, escogencia de instrumentos, exploración, recolección y análisis e interpretación de resultados. La primera etapa consistió en una revisión documental buscando fundamentar las dificultades con el concepto de función, características y posibles causas, y sobre la evolución de dicho concepto. En la segunda se escogieron los instrumentos tipo cuestionario, basados en las definiciones, nociones e ideas sobre función, identificadas en el análisis epistemológico, aquí se analiza solo uno de ellos. En la tercera se recogió la información al aplicar los cuestionarios a los estudiantes, y en la cuarta se hizo el análisis y la discusión de los hallazgos, situación por situación, teniendo en cuenta las categoría de análisis inductivas que surgían a medida que se realizaba el análisis de las producciones de los estudiantes [14]. Finalmente se elaboraron las conclusiones y las propuestas de mejora.

En la situación que se analiza aquí se utilizó el registro coloquial como registro principal. En cada cuestionario se pidió a los estudiantes hacer transformaciones tipo conversión y tipo tratamientos, al identificar los elementos de la función presentes en el registro de partida y representarlos en el de llegada, o al interior del mismo, al operar los elementos identificados en éste al interior del registro, teniendo en cuenta las reglas que rige a cada uno de éstos.

1. Participantes

La investigación se hizo con estudiantes con edades entre 15 y 18 años, en un curso ordinario de pre-cálculo (el curso previo al ingreso a la universidad). Los informantes fueron un grupo de 46 estudiantes colombianos (En el análisis se identificaran como E_n, con n = 1, 2, 3, …, 46) de undécimo grado de la media académica de una Institución pública, del sector rural del Departamento de Córdoba.

2. Técnicas de recolección de la información

Se utilizaron tres tipos de técnicas: cuestionarios, observación participante y grupos de discusión. Los cuestionarios se presentaron por escrito y con preguntas abiertas; la observación participante se realizó durante todo el proceso de recolección de la información, combinada con las otras técnicas, y los grupos de discusión se hicieron posteriores a la aplicación de los cuestionarios, utilizando como guía para las preguntas, las respuestas dadas por los mismos estudiantes a las cuestiones planteadas. Esto permitió validar las respuestas de los participantes, ya que en la interacción entre compañeros se iba profundizando a partir del análisis crítico de las intervenciones de cada uno en el trabajo cooperativo [14].

3. El instrumento y las categorías de análisis

A los estudiantes se les presentó la siguiente situación: María Eugenia tiene un plan en una empresa de telefonía móvil consistente en un cargo fijo de $ 8.000 y $ 70 por cada minuto que consuma.

Se establecieron las categorías de análisis previas que se muestran en la tabla 1, para determinar los porcentajes de aciertos de los estudiantes en cada una de estas cuestiones al dar sus respuestas, pero además se tuvo en cuenta otras categorías de análisis inductivos, resultado de la gran variedad de respuestas a cada una de las situaciones, las cuales resultaban imposibles de prever por ser una prueba con preguntas abiertas [4].

Tabla 1. Categorías de análisis y cuestiones planteadas a los estudiantes

N°	**Categorías de análisis**	**Tipo de preguntas o cuestiones planteadas**
1	Identificación de los elementos de una función	¿Qué cantidades intervienen en la situación?
2	Relación entre los elementos de una función	¿Cuáles de las cantidades varían y cuales permanecen fijas (constantes)? Y ¿cómo se relacionan entre ellas?
3	Modelación de una situación funcional	Encuentra una expresión matemática que modele esta situación.
4	Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas	Describe el proceso que seguiste para responder la pregunta K
5	Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita	Si se sabe que el valor de la factura fue de $ 36.350, ¿cuántos minutos adicionales consumió?
6	Identificación y uso del patrón de regularidad y de crecimiento de la función	En un mes María Eugenia recibe una factura por $ 36.350. Al mes siguiente la factura le viene por $ 43.140, ¿cuántos minutos adicionales consumió?
7	Paso al registro gráfico	Realiza una gráfica que represente la situación

A continuación se describen los aspectos que se consideraron más relevantes en el análisis de las producciones de los estudiantes.

4. Procesamiento de la información

Para el análisis de las producciones de los estudiantes, tanto los registros orales como los escritos, se hizo un análisis de contenido teniendo en cuenta las categorías de análisis [14], se hicieron los agrupamientos requeridos para establecer los porcentajes, se establecieron relaciones entre categorías y se hizo la triangulación por técnicas y por observador.

C. análisis y discusión de resultados

Los resultados se resumen en la tabla 2 con porcentajes de aciertos. Además, con el fin de ilustrar las descripciones realizadas en el análisis, se tomaron algunas soluciones dadas por los estudiantes a algunas de las cuestiones planteadas en la situación.

Tabla 2. Número y porcentaje de estudiantes que acertaron por categoría de análisis

Categorías de análisis	**N° de est.**	**Porcentaje**
Identificación de los elementos de una función	24	52,17%
Relación entre los elementos de una función	21	45,65%
Modelación de una situación funcional	12	26,8%
Descripción de los procesos realizados	18	39,13%
Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita	10	21,73%
Identificación y uso del patrón de regularidad y de crecimiento de la función	20	43,47%
Realización de una gráfica que represente la situación	6	13,04%

1. Identificación de los elementos de una función

Aunque un grupo significativo de estudiantes (52,17%) identificaron algunas de las cantidades que intervienen en la situación, coincidimos con [4] en que tienen serias dificultades para identificar y decodificar los elementos de una función en una situación funcional y con el manejo de las reglas que rigen el funcionamiento de cada registro. Sin embargo, algunos (17,39%) mencionan cantidades como el valor de los minutos y el valor de la factura, como es el caso del estudiante E_{08} mostrado en la fig. 1, uno de los pocos que llama los elementos por su nombre. Sin embargo, ninguno de ellos menciona la totalidad de los elementos que intervienen en la situación.

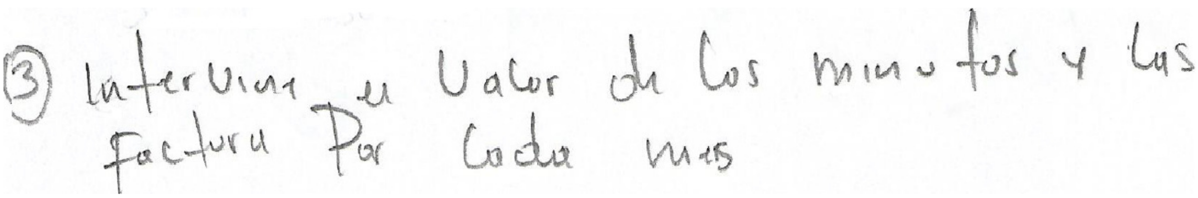


Figura 1. Respuesta dada por el estudiante E_{08} al identificar los elementos de la función en la situación planteada.

2. Relación entre los elementos de una función.

Estos estudiantes (45,65%) dan cuenta de algún tipo de relación entre los elementos de una función, y hacen mayores precisiones al relacionar los elementos de la función. Un ejemplo de ello es lo realizado por el estudiante E_{25}, mostrado en la En la fig. 2 donde este relaciona el valor de la factura con la cantidad de minutos consumidos, además, establece una de las cantidades que varían y una de las que permanecen fijas. Lo que es un evidente avance, sin embargo, el no poder identificar todas las cantidades que intervienen en la situación, les dificultó establecer relaciones entre ellas. Por ejemplo, ignoraron el cargo fijo de la factura y operaron la representación algebraica de la función como si fuera una función afín evidenciando un obstáculo en el sentido de [15].

El análisis de las producciones de este grupo de estudiantes lleva a pensar que su prioridad era realizar cualquier tipo de operaciones con las cantidades presentes en la situación, más que dar con una respuesta adecuada a los requerimientos de la situación. Esto los llevó a realizar diversas operaciones tanto aditivas como multiplicativas, y de paso a cometer errores en el sentido de los aislados por [17]: haciendo algún cambio en los signos de los elementos numéricos que intervienen en la expresión (errores de operación); igualando sucesivamente cantidades que no son equivalentes (errores de escritura), o agregando u omitiendo términos que no están en la situación (errores de entrada). Lo que puede ser causado por el pobre manejo de las reglas internas de cada registro [18], las que según [9] son bien distintas y autosuficiente en cada uno de estos.

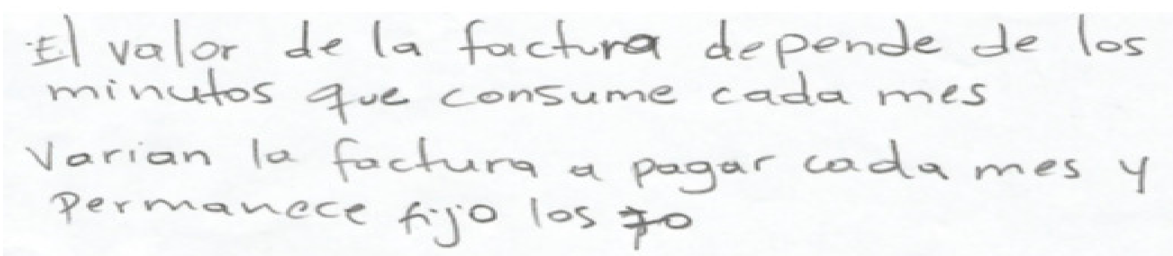
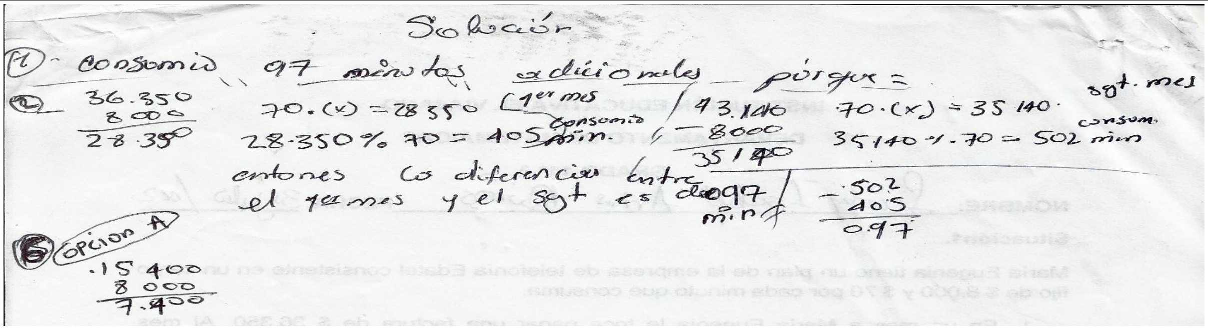


Figura 2. Respuesta dada por el estudiante E_{25} al relacionar los elementos de la función en la situación 2.

3. Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita

Solo el 21,73% de los estudiantes utilizaron el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada; lo hicieron fraccionando la igualdad, tomaron el costo total de cada factura, le restaron el cargo fijo y esa diferencia fue la que igualaron a 70x, luego dividieron la diferencia obtenida anteriormente entre 70, obteniendo como resultado 502 para una factura y 405 para la otra; deduciendo ellos que en el primer mes se consumieron 405 minutos y en el segundo 502 minutos. Para encontrar el número de minutos adicionales consumidos entre un mes y el otro, hicieron la diferencia entre 502 y 405, como se puede apreciar en el manuscrito del estudiante E_{16} mostrado en la fig. 3.



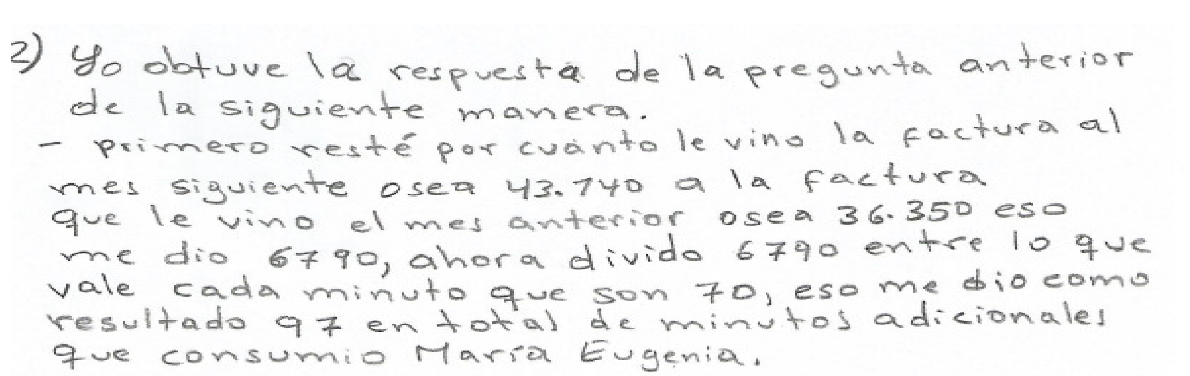
Solución
1. consumió 97 minutos adicionales porque =
2. 36.350 − 8000 = 28.350 70.(x) = 28550 (1er mes consumo) 28.350 % 70 = 405 min. / 43.140 − 8000 = 35140 70.(x) = 35 140. sgt. mes consum. 35140 % 70 = 502 min
entonces la diferencia entre el 1er mes y el sgt es de 097 min / 502 − 405 = 097
3. opción A 15 400 − 8 000 = 7.400

Figura 3. Respuesta dada por el estudiante E_{16} al tratar de utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita en la situación planteada.

Coincidimos en este caso con lo reportado por [19] en que los estudiantes no hacen distinción entre variable e incógnita y el manejo que les dan a las funciones es meramente operacional como si fueran ecuaciones sin discernir la diferencia entre unas y otras.

4. Descripción de los procesos realizados

Un grupo de estudiantes (39,13%) describieron coherentemente, el procedimiento realizado para dar su respuesta; mientras que los restantes volviendo a escribir los pasos que realizaron para obtener su respuesta o describieron un proceso herrado, reforzando lo reportado por [14]. En la fig. 4. se muestra el manuscrito del estudiante E_{15}, quien da una respuesta bastante coherente tanto con sus propios resultados, como con lo que se le solicitó realizar.

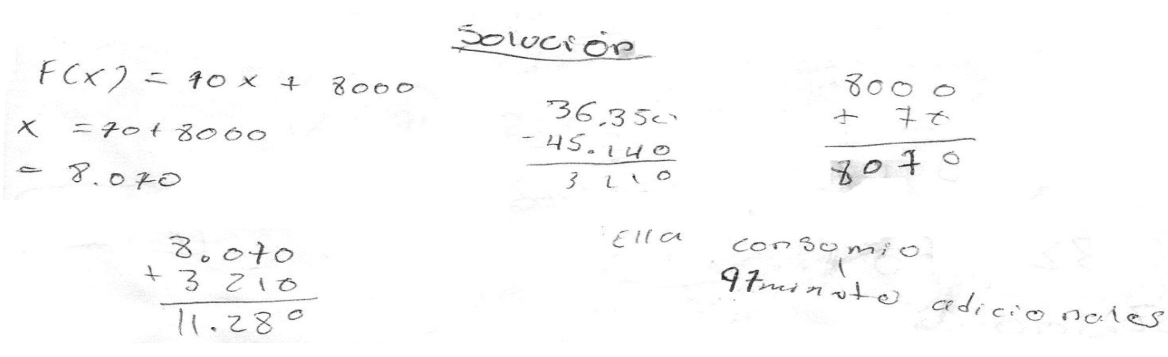


2) Yo obtuve la respuesta de la pregunta anterior de la siguiente manera.
- primero resté por cuanto le vino la factura al mes siguiente osea 43.740 a la factura que le vino el mes anterior osea 36.350 eso me dio 6790, ahora divido 6790 entre lo que vale cada minuto que son 70, eso me dio como resultado 97 en total de minutos adicionales que consumio María Eugenia.

Figura 4. Respuesta dada por el estudiante E_{15} al describir sus procesos en la situación planteada.

5. Modelación de una situación funcional

El 26,8% (12) de los estudiantes plantean una expresión algebraica que modela la situación funcional, la que utilizaron como andamio para dar respuesta a otras cuestiones por las Involucrada en la situación que se les indagó. Y tal y como lo reportan [14] la representación algebraica fue la única representación que consideraron como modelo de la situación, ninguno consideró como tal una tabla o la gráfica de la función.



Solución
F(x) = 70x + 8000
x = 70 + 8000
= 8.070
36.350 − 45.140 = 3 210
8000 + 70 = 8070
8.070 + 3 210 = 11.280
Ella consumio 97 minuto adicionales

Figura 5. Respuesta dada por el estudiante E_{25} al modelar la situación planteada.

En la fig. 5, el estudiante E_{25} plantea una expresión algebraica que modela la situación, pero no la usó adecuadamente para dar respuestas adecuadas a las cuestiones que se les plantearon. Comete una serie de errores de entrada [17] al operar una expresión diferente a la propuesta inicialmente. En general confunden el dominio con el rango de la función (Dolores, 2004; [8] y finalmente resuelven correctamente lo que habían planteado mal; es decir, realizaron igualdades sucesivas con términos que no son equivalentes teniendo al final la respuesta pedida, lo que según [20] hacen que este tipo de errores sean recurrentes, por cuanto los estudiantes no lo reconocen como tales.

6. Identificación y uso del patrón de regularidad y de crecimiento

En la fig. 6, se aprecia que el estudiante E_5 establece una relación entre el valor de un minuto y el de diez minutos, logrando determinar que los diez minutos tienen un valor de $700, con lo cual hace una secuencia partiendo del valor de la primera factura ($ 36.350) y sumándole $700 cada vez con el pretexto de llegar al valor de la segunda factura ($ 43.140), no logrando con esto el valor exacto relacionado en ésta, sino un valor superior, por lo que se evidencia que el estudiante determina el valor sobrepasado con respecto al valor de la segunda factura y determina que el excedente corresponde a tres minutos e inmediatamente determina que María Eugenia consumió 97 minutos adicionales.

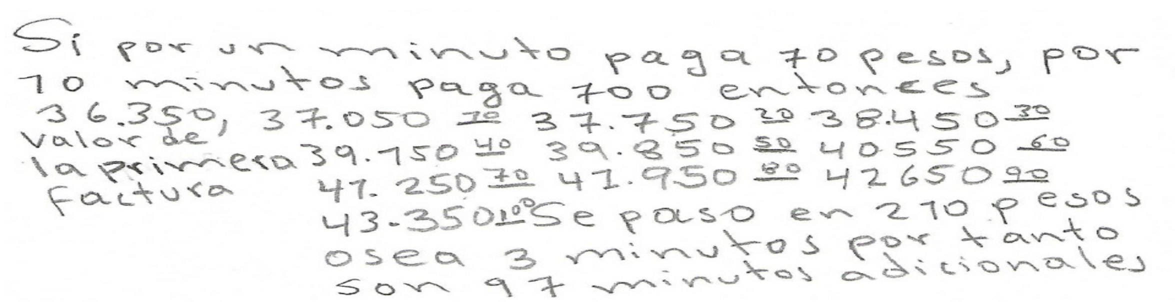

Si por un minuto paga 70 pesos, por
10 minutos paga 700 entonces
36.350, 37.050 1º 37.750 2º 38.450 3º
Valor de
la primera 39.150 4º 39.850 5º 40550 6º
Factura 41.250 7º 41.950 8º 42650 9º
43.350 10º Se paso en 270 pesos
osea 3 minutos por tanto
son 97 minutos adicionales

Figura 6. Respuesta dada por el estudiante E_5 al identificar el patrón de regularidad en la situación.

7. Realización de una gráfica que represente la situación

Los estudiantes (86.96%) presentaron serias dificultades al realizar la gráfica de la función involucrada en la situación. Estas dificultades estuvieron relacionadas con la construcción del plano, al colocar los valores en los ejes, en el orden en que los fueron encontrando al realizar las operaciones. Y aunque los datos forman parte de la situación, se evidencia cierta incoherencia en su ubicación y al indagárseles el porqué de esta respuesta no pudo explicarla. Estas dificultades concuerdan con las reportadas por [2].

III. CONCLUSIONES

Se puede concluir que las principales dificultades de los estudiantes se enfocan en los siguientes aspectos: la identificación y relación de los elementos de la relación funcional involucrada en la situación, la identificación y uso del patrón de regularidad y de crecimiento de la situación para modelarla, identificación y uso de un modelo de la situación y en el uso del concepto de ecuación para la consecución de una incógnita.

Los estudiantes de este grupo presentan serias dificultades para identificar los elementos de una función, y por ende para encontrar relaciones de dependencia entre las magnitudes que intervienen en la situación. Cuando se les solicitó identificar los elementos de la función involucrada en la situación, siempre dieron valores puntuales de ellas, es decir, escogieron valores puntuales de las variables presentes en la situación planteada.

En relación con la identificación del patrón de regularidad y de crecimiento, la dificultad se evidencia cuando al estudiante le toca operar con cantidades grandes en la variable independiente debido a que lo hacen secuencialmente, de forma inductiva y las cantidades grandes le complican el proceso abortándolo luego de varios intentos fallidos. Aspecto este que a su vez dificulta la identificación o elaboración y de un modelo de la situación y su uso para obtener las respuestas a otras cuestiones planteadas.

En cuanto al uso del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad se presenta cuando se les da el valor de la variable dependiente para que hallen el valor de la variable independiente, es decir, no pudieron encontrar el valor de una incógnita dado el valor de la función. Esta dificultad parece ser causada por el hábito de los estudiantes de realizar procesos inductivos secuencialmente, utilizando tantos números como necesiten para obtener la respuesta solicitada, y al obligarlos a utilizar cantidades grande, terminan aburriéndose de tantos procedimientos secuenciales y abortando el proceso.

Aunque en general los estudiante presenten dificultades para identificar una función en contextos cotidianos, se observó un avance en las estructuras cognitivas de los estudiantes, toda vez que estos se fueron familiarizando en el trabajo con relaciones funcionales donde se incorporan situaciones que involucran elementos de la vida cotidiana como punto de partida en el trabajo matemático en el aula.

RECOMENDACIONES

Expresamos nuestros más sinceros agradecimientos al doctor Tulio R. Amaya De armas por sus asesorías y acompañamiento y al profesor Alfonso Chaucanés Jácome, nuestro tutor.

REFERENCIAS

[1]. F. Hitt,. "Dificultades en el aprendizaje del cálculo". Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia. Pp. 81-107. 2003.

[2]. J. López, & L. Sosa, "Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato". En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 308-318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 2008.

[3]. C. Dolores, "Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato". *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 7(003), 195-218. 2004.

[4]. T. R. Amaya, & N. Sgreccia, "Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función". *Revista Epsion*, Vol. 31(3), nº 88, 23-40. 2014.

[5]. C. Dolores, "Argumentación de los estudiantes en el análisis de funciones". En *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. México D.F: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 2006. Pp. 309-335.

[6]. Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior. "Fundamentación conceptual área de Matemáticas". Bogotá: Acevedo, M. Montañés, R. Huertas, C. Pérez, M. 2007.

[7]. R. Duval, "*Semiosis y pensamiento humano*". Cali:Universidad del Valle. 1999. P. 314.

[8]. F. Hitt, "Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2), pp. 213-223*. 2003.

[9]. R. Duval, "*Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*". Cali: Universidad del Valle. 2004.

[10]. Ministerio de Educación Nacional. "Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar". *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. 2005.

[11]. National Council of Teachers of Mathematics "*Principios y Estándares para la Educación Matemática*". Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur. 2000.

[12]. S. Van Lamoen, & M. Parraguez, "Construcción del concepto función cuadrática en estudiantes sordos". En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24*, 331-339. México DF: Comité Latinoamericano de **Matemática Educativa.** 2011.

[13]. J. D. Godino, V. Font, & C. Batanero, "*Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*". Granada: Universidad de Granada. 2003.

[14]. T. R. Amaya, & A. Medina, "Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal". *Revista Educación Matemática, 25(2), 119-140*. 2013.

[15]. G. Brousseau, "Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas". Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en *mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165-198*. 1999.

[16]. T. R. Amaya, "*Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer la conversión entre diferentes registros de representación de una función*". Tesis de maestría. Universidad Nacional de educación a Distancia. 2012.

[17]. V. Carrión, "Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales". *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, N° 11, pp 19-57*. 2007.

[18]. D. Meel. "Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE". *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6(3), 221-271*. 2003.

[19]. J. López, "Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función", Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. México. 2007.

[20]. R. Charnay, "Del análisis de los errores en matemáticas a los dispositivos de remediación: algunas pistas" Equipo de Investigación en didáctica de la Matemática INRP. Michel Mante del IREM de Lyon. En: *Grand N, Nº 48, pp. 37-64*. 1991.