AXIOMA DE ELECCIÓN DEBIL EN CATEGORIAS CON LIMITES Y COLIMITES FINITOS

Weak axiom of choice in categories with finite limits and finite co-limits

RESUMEN
El axioma de elección es quizá el más popular dentro de las matemáticas. En teoría de categorías aparece de manera natural y sin embargo algunas nociones equivalentes dentro de esta teoría solo se encuentran de manera superficial en los textos. Aquí damos una condición necesaria del axioma de elección débil y establecemos otras relaciones entre el axioma de elección débil y algunas propiedades de exactitud de productos fibrados de cubrimientos.

PALABRAS CLAVES: axioma de elección, cubrimiento, AE-categoría.

ABSTRACT

The axiom of choice is perhaps one of the most popular notions in mathematics. In category theory it occurs naturally and yet some equivalent notions in this theory are found only superficially in the texts. Here we show a necessary condition for the weak axiom of choice and we show other relationships between the weak axiom of choice and some exacts properties of cover's pullbacks.

KEYWORDS: *Choice axiom, cover, AE-category.*

EDGAR A. VALENCIA.
Matemático, Ms
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

YURI A. POVEDA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

CARLOS A. ESCUDERO
Matemático, Ph.D.
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
Carlos10@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El axioma de elección es uno de los más populares dentro de las matemáticas. Es común encontrar diversas representaciones equivalentes a él. En teoría de categorías se puede representar de manera natural mediante la propiedad: todo cubrimiento tiene inversa a derecha. En este artículo partimos de esta definición y encontramos algunas relaciones asociadas una propiedad de exactitud de pullbacks de cubrimientos.
Todas las demostraciones son originales e inéditas. Especialmente el resultado principal que dice que (a) implica (b) en la definición 2.

2. CONTENIDO

2.1 Nociones básicas

Se establecen las nociones de imagen y cubrimiento de un morfismo. Después se demuestran algunas implicaciones entre las propiedades de la definición 2.

Definición 1. Una categoría $\mathfrak{C}$ tiene imágenes si para todo morfismo $f\colon A \to B$ existen morfismos i, r con i monomorfismo, tales que $f = ir$ y para todo par de morfismos x, y tales que $f = yx$ con y monomorfismo, existe un único morfismo α tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "r"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "i"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & \\
& D \arrow[uur, bend right, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

Conmuta. El morfismo i es único salvo isomorfismos, y es llamado la imagen de f. Cuando i es la identidad a f se le llama cubrimiento.

Definición 2. En una categoría $\mathfrak{C}$ con límites y co-límites finitos vale el axioma de elección débil si todo cubrimiento c posee inverso a derecha c^*, es decir cc^* es una identidad.

Consideremos las siguientes propiedades: Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con límites y co-límites finitos.

a) En $\mathfrak{C}$ vale el axioma de elección débil.

Fecha de Recepción: 10 de Mayo de 2011
Fecha de Aceptación: 14 de Julio de 2011

b) En $\mathfrak{C}$ cada pullback de cubrimientos es pushout.

c) En $\mathfrak{C}$ cada pushout de cubrimientos es pullback.

d) En $\mathfrak{C}$ los pullbacks preservan cubrimientos.

e) En $\mathfrak{C}$ cubrimiento implica epi.

Proposición 3. Las siguientes implicaciones son verdaderas.

1. $A \Rightarrow B, D, E$
2. $C, E \Rightarrow A$
3. $B, D, E \nRightarrow A$

Demostración.

$(A \Rightarrow E)$

Dado c un cubrimiento y x, y morfismos tales que $xc = yc$, entonces por hipótesis existe c^* tal que $cc^* = id$ y por lo tanto

$$x = xcc^* = ycc^* = y.$$

$(A \Rightarrow D)$

Dados el cubrimiento c y el morfismo f con el mismo codominio se quiere demostrar que en el pullback

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & D \arrow[d, "c"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

f_1 es cubrimiento. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "c^*f"] \arrow[ddr, bend right, "id_A"'] & & \\ & C \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & D \arrow[d, shift right, "c"'] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, shift right, "c^*"'] \end{tikzcd}$$

como $cc^*f = f$, de la definición de pullback se sigue que existe k tal que $f_1 k = id_A$, así f_1 es cubrimiento.

$(A \Rightarrow B)$

Dados los cubrimientos c_1, c_2 con el mismo codominio B; se quiere demostrar que el pullback

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdot \arrow[d, "c_1"] \\ \cdot \arrow[r, "c_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Es pushout.
Sean α y β morfismos con el mismo codominio, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdot \arrow[d, "c_1"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ \cdot \arrow[r, "c_2"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & \cdot & \\ & & \cdot \end{tikzcd}$$

Se debe demostrar que existe un único morfismo θ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdot \arrow[d, "c_1"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ \cdot \arrow[r, "c_2"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & \cdot \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\ & & \cdot \end{tikzcd}$$

Conmuta.
Como los pullbacks preservan cubrimientos existen morfismos c_1^*, c_2^*, f_1^*, f_2^* tales que $f_i f_i^*$ es una identidad y $c_i c_i^*$ es una identidad para $i = 1, 2$.

Sea $\theta = \beta c_1^*$. Veamos primero que $\theta c_1 = \beta$. Del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] & A \arrow[l, shift right, "f_2^*"'] \arrow[d, shift right, "c_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
D \arrow[u, shift left, "f_1^*"] \arrow[r, shift left, "c_2"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & B \arrow[l, shift left, "c_2^*"] \arrow[u, shift right, "c_1^*"'] \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\
 & & {}
\end{tikzcd}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta c_1 &= \beta c_1^* c_1 = \beta(f_2 f_2^*)c_1^* c_1 \\
&= (\beta f_2) f_2^* c_1^* c_1 = (\alpha f_1) f_2^* c_1^* c_1 \\
&= \alpha(f_1 f_2^* c_1^* c_1)
\end{aligned}$$

De otra parte $c_2 f_1 = c_1 f_2$ entonces,

$$\begin{aligned}
c_2(f_1 f_2^* c_1^* c_1) &= (c_2 f_1) f_2^* c_1^* c_1 \\
&= (c_1 f_2) f_2^* c_1^* c_1 = (c_1 f_2 f_2^* c_1^*) c_1 \\
&= c_1
\end{aligned}$$

consecuentemente por la definición de pullback existe un único k tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "id_A"] \arrow[ddr, bend right, "f_1 f_2^* c_1^* c_1"'] & & \\
 & C \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[d, "c_1"] \\
 & D \arrow[r, "c_2"] & B
\end{tikzcd}$$

Conmuta. En particular

$$f_1 k = f_1 f_2^* c_1^* c_1;$$

Consecuentemente se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta c_1 &= \beta c_1^* c_1 = \alpha(f_1 f_2^* c_1^* c_1) \\
&= \alpha(f_1 k) = (\alpha f_1)k = \beta f_2 k \\
&= \beta
\end{aligned}$$

Ahora se prueba que $\theta c_2 = \alpha$. En efecto, por simetría del séptimo diagrama se tiene que

$$\alpha c_2^* c_2 = \alpha \tag{11}$$

Como $c_1 c_1^* = id_B = c_2 c_2^*$ y el tercer diagrama es pullback, entonces existe δ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "c_1^*"] \arrow[ddr, bend right, "c_2^*"'] & & \\
 & C \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[d, "c_1"] \\
 & D \arrow[r, "c_2"] & B
\end{tikzcd}$$

Consecuentemente

$$\theta = \beta c_1^* = \beta f_2 \delta = \alpha f_1 \delta = \alpha c_2^*$$

Por lo tanto de la ecuación (11)

$$\theta c_2 = \alpha c_2^* c_2 = \alpha$$

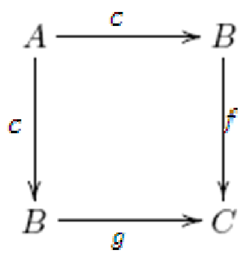
Para finalizar la prueba resta demostrar que θ es único salvo isomorfismo. En efecto, si ω es tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & {} \arrow[d, "c_1"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
{} \arrow[r, "c_2"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & {} \arrow[dr, dashed, "\omega"] & \\
 & & {}
\end{tikzcd}$$

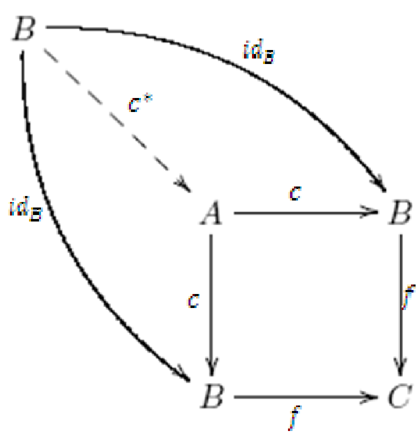
conmuta, entonces $\omega = \omega c_1 c_1^* = \beta c_1^* = \theta$.

$(C, E \Rightarrow A)$

Dado $c\colon A \to B$ un cubrimiento, considere el siguiente pushout



Por hipótesis c es un epimorfismo, así $fc = gc$ implica $f = g$. De otra parte se tiene por hipótesis que pushout de cubrimientos es pullback, consecuentemente existe c^* tal que el siguiente diagrama

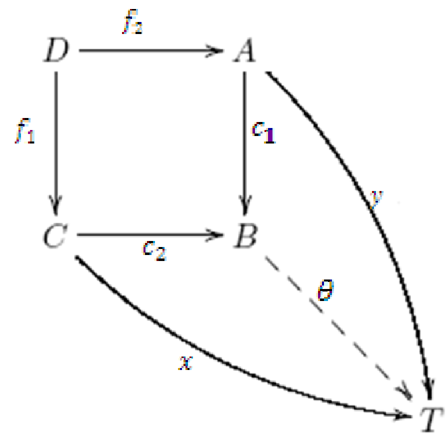


Conmuta. En particular $cc^* = id_B$.

$(B, D, E \nRightarrow A)$

Es conocido que en la categoría de conjuntos sin axioma de elección vale que los pullbacks preservan cubrimientos, y que los cubrimientos son epimorfismos. Basta demostrar que pullback de cubrimientos es pushout.

Dados los cubrimientos c_1, c_2, consideremos el $pullback(c_1, c_2)$ y las funciones x, y tales



que

$yf_2 = xf_1$, se quiere demostrar que existe un único θ tal que $\theta c_1 = y$ y $\theta c_2 = x$.

Defina $\theta\colon B \to T$, $\theta(b) = x(n)$ con $n \in c_2^{-1}(b)$, como c_2 es sobre entonces $c_2^{-1}(b) \neq \emptyset$. Veamos que θ está bien definida. Se sabe que

$$D = \{(n, a) \in C \times A \,|\, c_2(n) = c_1(a)\}$$

Si $n, m \in c_2^{-1}(b)$ entonces existe $a \in A$ tal que $c_1(a) = b$ debido a que c_1 es epimorfismo y por lo tanto las parejas (n, a) y (m, a) están en D, consecuentemente,

$$\begin{aligned} x(n) &= xf_1(n, a) = yf_2(n, a) = y(a) \\ &= yf_2(m, a) = xf_1(m, a) \\ &= x(m) \end{aligned}$$

Por construcción $\theta c_2 = x$. Veamos que $\theta c_1 = y$. Dado $a \in A$ existe $m \in C$ tal que $(m, a) \in D$ debido a que c_2 es sobreyectivo, entonces,

$$\begin{aligned} \theta c_1(a) &= \theta c_2(m) = x(m) \\ &= xf_1(m, a) = yf_2(m, a) \\ &= y(a) \end{aligned}$$

θ es único debido a que c_1 es epimorfismo.

El resultado precedente se puede extender un poco más. Por ejemplo en toda categoría pre-regular donde vale EXT (extensionalidad en morfismos: Para todo par de morfismos f,g con el mismo dominio y el mismo codominio se tiene que los morfismos constantes del dominio de f y g son generadores), pullback de cubrimientos implica pushout de cubrimientos.

Saber si una categoría es una AE-categoría (categoría donde vale el axioma de elección) en muchos casos no es una tarea fácil. A continuación presentamos una caracterización propuesta por Peter Freyd [2], de algunas AE-categorías.

Proposición 4. Dada $\mathfrak{A}$ una categoría cartesiana donde para todo morfismo $f : A \to B$ existe un morfismo $e : A \to A$ tal que $e^2 = e$, $fe = e$ y el núcleo de e es igual al núcleo de f, entonces $\mathfrak{A}$ es una AE- categoría regular.

Demostración. Se debe ver que $\mathfrak{A}$ posee imágenes, que en $\mathfrak{A}$ vale el axioma de elección débil y finalmente que los pullbacks preservan cubrimientos.

Tomemos $i : C \to A$ el igualador de e y la identidad id_A, entonces $ei = i$, como e iguala a e y a la identidad id_A, debido a que $e^2 = e$, entonces existe un único $k : A \to C$ tal que $ik = e$.

Veamos que $ki = id_C$.

(a) ki es un monomorfismo: Dados x, y tales que $kix = kiy$ entonces $i(kix) = i(kiy)$, consecuentemente,

$$\begin{aligned} i(kix) &= (ik)ix = eix = ix \\ &= i(kiy) = (ik)iy \\ &= eiy = iy \end{aligned}$$

Así $ix = iy$, como i es un monomorfismo entonces $x = y$ como queríamos ver.

(b) $kiki = k(ik)k = kei = ki$, como ki es un mono entonces $ki = id_C$ y así k es un epimorfismo, como queríamos.

Veamos ahora que todo morfismo $f : A \to B$ posee imágenes,

$$f = fe = fik = (fi)k$$

Veamos que fi es la imagen de f

(a) fi es monomorfismo: por hipótesis

$$\begin{aligned} (f\alpha = f\beta) &= pullback(f, f) \\ &= pullback(e, e) \\ &= (e\alpha = e\beta) \end{aligned}$$

debido a que tienen el mismo núcleo. Por lo tanto, dados x, y tales que $fix = fiy$, existe un único z tal que $\beta z = iy$ y $\alpha z = ix$. Como $e\alpha = e\beta$, entonces,

$$ix = eix = e\alpha z = e\beta z = eiy = iy$$

como i es un monomorfismo entonces $x = y$.

(b) fi es la imagen de f: Dada $f = xy$ otra descomposición de f con x monomorfismo, entonces,

$$xye = fe = f = xy$$

como x es mono entonces $ye = y$. Se debe probar que existe s tal que $xs = fi$ y $sk = y$. Basta tomar $s = yi$, debido a que,

$$\begin{aligned} yik &= ye = y \\ xyi &= fi \end{aligned}$$

Finalmente k resulta invertible a la derecha, como la imagen de un cubrimiento es la identidad, todos los cubrimientos tendrán inversa a derecha; es decir en $\mathfrak{A}$ vale el axioma de elección débil.

Finalmente demostremos que los cubrimientos son estables por pullbacks. Como vale el axioma de elección débil, todo cubrimiento tiene inversa a derecha, es decir para todo f cubrimiento existe f^* tal que $ff^* = e$ con e la identidad a derecha de f.

Dados f, g morfismos con el mismo codominio, f un cubrimiento y $(gn = fm) = pullnack(f, g)$; debemos demostrar que n es cubrimiento. Tomemos e_n la identidad a derecha de n, entonces, e_n es la identidad a izquierda de g por construcción. Como,

$$g = g(e_n) = f(f^* g e_n)$$

Así e_n, y $f^* g e_n$ son un cono del diagrama f, g por lo tanto existe un único k tal que $nk = e_n$, como toda identidad es cubrimiento entonces nk es cubrimiento y consecuentemente n es cubrimiento.

CONCLUSIONES

En los procesos del pensamiento se realizan operaciones reversibles. Son particularmente interesantes los del ámbito de las matemáticas en donde es posible devolver las operaciones realizadas con el ánimo de retornar al estadio de partida y enriquecerlo con el conocimiento adquirido en los otros estadios. Por ejemplo en las ecuaciones diferenciales es muy común encontrar problemas inversos.

El axioma de elección es una operación reversible en la que diversos problemas de las matemáticas se ven íntimamente relacionados con él. Encontrar formas del axioma de elección en categorías permite dilucidar aún más su misteriosa esencia.

6. BIBLIOGRAFIA.

[1] P. J. Freyd, *The axiom of choice, J. Pure Appl. Alg 19, 1980, (103-125)*

[2] P. J. Freyd and A. Scedrov, *Categories, Allegories*, North-Holland (1990).

[3] P. T. Johnstone, *Topos theory,* Academic Press INC. 1977.

[4] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician,* Springer, (Graduate Texts in Mathematics), 1998

[5] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, 1992.