SIMPLIFICACIÓN DE SEÑALES SENOIDALES Y COSENOIDALES MEDIANTE TRIANGULOS DE CANO OBTENIDOS USANDO PROPIEDADES DE LA CONVOLUCION

Sine and Cosine Simplification by Cano triangles obtained using the convolution properties

RESUMEN
Este artículo presenta un procedimiento bastante novedoso para reducir potencias trigonométricas en términos de polinomios de grado simple con componentes armónicas. El resultado fue obtenido mediante la manipulación de las transformaciones de Fourier de las funciones *Seno* y *Coseno* junto con el empleo de álgebra convolutiva. La función cosenoidal fue presentada por Cano y Molina en [1]. Se permite la verificación de lo planteado a través de un programa en web.

PALABRAS CLAVES: Convolución, Transformada de Fourier, Funciones Trigonométricas.

ABSTRACT
This paper shows a novel procedure for reducing Trigonometric Power Functions into lineal polynomial representation with harmonics. The results are obtained through manipulations of Cosinuidal Fourier Transform and using Convolution Algebra.

KEYWORDS: *Convolution, Fourier Transform, Trigonometric Functions.*

ALEXANDER MOLINA CABRERA
M.Sc. Ingeniería Eléctrica
almo@utp.edu.co

JUAN G. VALENZUELA HERNÁNDEZ
Estudiante Ingeniería Eléctrica
jgvalenzuela@utp.edu.co

OSCAR DANILO MONTOYA GIRALDO
Estudiante Ingeniería Eléctrica
odmontoya@utp.edu.co

LUISA FERNANDA ESCOBAR DÁVILA
Estudiante Ingeniería Eléctrica
luisafer1266@hotmail.com

1. INTRODUCCIÓN

Las señales de campo electromagnético generalmente se pueden analizar en el espectro de frecuencia con mayor facilidad toda vez que en el tiempo presentan variadas irregularidades y componentes armónicas [2].

Para el tratamiento de estas señales en el espectro de frecuencia se ha estado usando la transformada de Fourier con excelentes resultados. Lo anterior porque permite realizar cálculos que consideran cada componente armónica y así se centra el análisis en el comportamiento de las magnitudes de cada componente armónica por separado. Posteriormente los resultados se pueden unir mediante el teorema de superposición [5].

Dentro del análisis efectuado, se ha logrado conseguir un procedimiento interesante que permite expresar las señales de muestreo (potencias sinusoidales de orden elevado) como la suma de varias señales sinusoidales simples de diferentes componentes armónicas [6].

La ventaja de esta representación radica en que no es necesario descomponer en sucesiones infinitas, tal como la serie de Fourier lo hace, sino que se emplea un corto procedimiento algebraico posible gracias a la transformación de Fourier. Las aplicaciones van desde la descomposición de señales sinusoidales de orden elevado para el uso en matemáticas (integrales), pasando por el diseño de filtros, hasta el análisis de componentes armónicas en modulación y demodulación [6], [7], [8]. Un avance previo a lo presentado en éste artículo está ilustrado en [1] por Cano y Molina, donde se presentan las formas cosenoidales, que junto con lo ilustrado en éste artículo es posible afirmar que es un camino novedoso para lograr nuevas representaciones de potencia trigonométricas.

Para ilustrar el procedimiento y dar sustento matemático a lo planteado aquí se presenta en la sección 2 una breve descripción de la Transformada de Fourier con una de sus propiedades. En la sección 3 se presenta la convolución con algunas de sus características y en la sección 4 se muestran las funciones trigonométricas senoidales y cosenoidales, mencionadas junto con su transformación en el dominio de la frecuencia así como los pasos para lograr la representación de las potencias de orden superior en términos de los de orden lineal.

La novedad en el artículo es la presentación de los triángulos que simplifican funciones senoidales y cosenoidales de alto orden con reglas sencillas.

2. TRANSFORMADA DE FOURIER

2.1 Generalidades

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2011
Fecha de Aceptación: 29 de Agosto de 2011

Las señales con las que se interactúa permanentemente en los laboratorios y en simulaciones son señales que existen en el dominio del tiempo. Algunas de estas señales pueden ser representadas en otros espacios matemáticos de manera que permiten efectuar un análisis más sencillo que en el dominio del tiempo [2], [3].

Uno de los espacios donde es posible estudiar las señales de tipo periódico es en el dominio de la frecuencia. Las transformaciones deben cumplir con algunas propiedades básicas que permitan el estudio determinístico de los problemas, además de permitir extraer resultados en la frecuencia que se cumplan en el dominio del tiempo [3].

Una herramienta que permite tal transformación de señales es la Transformada de Fourier. De esta manera se logran representaciones en el dominio de la frecuencia de algunas funciones así como la posibilidad de una transformación inversa que permita transformar de nuevo al dominio del tiempo. Esta posibilidad de la transformación inversa es bastante útil y necesaria en el desarrollo que se plantea en la sección 4 [2], [4].

Se presentan la Transformada de Fourier y la Transformada Inversa de Fourier en las ecuaciones (1) y (2).

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jwt}dw \tag{2}$$

Ahora, una relación de correspondencia se puede establecer entre las dos funciones mediante la representación en (3).

$$f(t) \longleftrightarrow F(w) \tag{3}$$

La semejanza en las ecuaciones muestra una latente simetría en las transformaciones pero la única propiedad necesaria será la de la linealidad de la transformación que se ilustrará a continuación en la sección 2.2.

2.2 Linealidad de la Transformada de Fourier.

Considerando las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$ junto con sus transformadas continuas de Fourier mostradas en (4) y la existencia de valores reales k_1 *y* k_2, se puede obtener como resultado lo mostrado en (5) [2].

$$\begin{aligned} f_1(t) &\longleftrightarrow \mathbf{F}_1(w) \\ f_2(t) &\longleftrightarrow \mathbf{F}_2(w) \end{aligned} \tag{4}$$

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \longleftrightarrow k_1 F_1(w) + k_2 F_2(w) \tag{5}$$

Aunque otras propiedades se pudieran plantear, para el desarrollo del artículo se dan por hecho y el lector está invitado a consultarlas [2], [3].

3. CONVOLUCIÓN

El teorema de la convolución corresponde a una función de energía que permite obtener resultados importantes en el análisis de armónicos. Se presentará el teorema y se mencionarán las propiedades útiles en el desarrollo de lo que aquí se denominará álgebra convolutiva. Se ilustrará la convolución en el dominio de la frecuencia [2], [3].

3.1 Representación

Supóngase una relación entre funciones tal como se ilustra en (6) y (7).

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)dx \tag{6}$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(w-u)du \tag{7}$$

Las integrales así planteadas son denominadas las integrales de convolución y se expresa simbólicamente tal como se ilustra en la ecuación (8) y (9) [8].

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \tag{8}$$

$$F(w) = F_1(w) * F_2(w) \tag{9}$$

La representación, de las convoluciones mostradas en (8) y (9), es fácilmente verificable y corresponden a lo planteado en las ecuaciones (10) y (11) [8].

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(w) = \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w) \tag{10}$$

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(w)F_2(w) \tag{11}$$

3.2 Consideraciones adicionales

Es demostrable que la convolución cumple con las leyes siguientes [2], [8]:

- Ley Conmutativa.
- Ley distributiva.
- Ley Asociativa.

3.3 Algebra Convolutiva

Como se mostró en el artículo de Cano y Molina [1], es necesario presentar algunas relaciones iníciales que se explican en [7], [8].

La primera de ellas se muestra en la ecuación (12) y se conoce como el módulo convolutivo. Sucesivamente se presentan otras [2].

$$F(w)*\delta(w)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\delta(w-u)du=F(w) \qquad (12)$$

Una segunda relación entre funciones en convolución se puede establecer tomando como base lo planteado hasta el momento. Esta nueva relación considera (3) obteniéndose (13).

$$\begin{gathered} f(t)*f(t)\longleftrightarrow F(w)F(w) \\ f^{2*}(t)\longleftrightarrow F^{2}(w) \end{gathered} \qquad (13)$$

En forma dual, en la frecuencia se obtiene:

$$\begin{gathered} f(t)f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[F(w)*F(w)\right] \\ f^{2}(t)\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[F^{2*}(w)\right] \end{gathered} \qquad (14)$$

El resultado de (14) se puede generalizar para una expresión de potencia *n*, en el tiempo obteniéndose una representación así:

$$f^{n}(t)\longleftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\left[F^{n*}(w)\right] \qquad (15)$$

Lo anterior se puede leer como "*F(w)* a la *n* convolutiva" permitiendo introducir el concepto de las potencias en la convolución.

Un tercer elemento se obtiene empleando la ley distributiva para un binomio. Los resultados se muestran en (16).

$$\begin{aligned} \left(F_1(w)+F_2(w)\right)^{2*} &= \left(F_1(w)+F_2(w)\right)*\left(F_1(w)+F_2(w)\right) \\ \left(F_1(w)+F_2(w)\right)^{2*} &= F_1^{\,2*}(w)+2F_1(w)*F_2(w)+F_2^{\,2*}(w) \end{aligned} \qquad (16)$$

Y para grado *n*, es posible obtener una expansión polinomial [1], [7].

$$\begin{aligned} &\left(F_1(w)\pm F_2(w)\right)^{n*} = \\ &C\binom{n}{0}F_1^{n*}(w)\pm C\binom{n}{1}F_1^{(n-1)*}(w)*F_2(w)\pm \\ &C\binom{n}{2}F_1^{(n-2)*}(w)*F_2^{\,2*}(w)\pm ...\pm C\binom{n}{n}F_2^{\,n*}(w) \end{aligned} \qquad (17)$$

Lo anterior es una simple implementación del Binomio de Newton al caso de un binomio convolutivo. Tales coeficientes, denominados coeficientes binomiales, son los formados por el triángulo de Pascal también denominado triángulo de Tartaglia, que son obtenidos mediante la expresión mostrada en (18).

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (18)$$

Donde $n, r \in Z^{+}$, $0 \le r \le n$

Una tercera y última relación se obtiene con base en lo descrito brevemente en [2] mediante (12). Aquí se menciona que:

$$F(w)*\delta(w-w_0)=F(w-w_0) \qquad (19)$$

Aplicando lo anterior, se propone una forma de expresar la potencia convolutiva de la delta de Dirac a través del uso recursivo de lo obtenido en (19) así:

$$\begin{gathered} Si: w_1=w_2=...=w_n=w_0 \\ \delta(w-w_1)*\delta(w-w_2)*...*\delta(w-w_n)=\delta^{n*}(w-w_0) \end{gathered} \qquad (20)$$

Por otro lado, dentro de los desarrollos matemáticos efectuados se logra plantear una generalización para lo expresado en (20) que se muestra en la ecuación (21).

$$\delta^{n*}(w-w_0)=\delta(w-nw_0) \qquad (21)$$

Este es el resultado más importante que se forma con todo lo anterior discutido, toda vez que abre las posibilidades de expresar una potencia en términos del desplazamiento en la frecuencia, lo que implica la aparición en el dominio del tiempo de componentes de tipo armónico.

Una extensión del resultado encontrado en (21) se muestra en las expresiones (22) y (23). Estas expresiones se presentan porque para el desarrollo de los binomios que resultan de las expresiones sinusoidales tienen alto valor.

$$\begin{gathered} \delta^{n*}(w-w_0)*\delta^{m*}(w-w_0)=\delta(w-nw_0)*\delta(w-mw_0) \\ \delta^{n*}(w-w_0)*\delta^{m*}(w-w_0)=\delta(w-(n+m)w_0) \end{gathered} \qquad (22)$$

$$\delta^{n*}(w-w_0)*\delta^{m*}(w+w_0)=\delta(w-(n-m)w_0) \qquad (23)$$

Lo anterior, a través del álgebra convolutiva, permite efectuar una serie de simplificaciones a funciones que contienen delta de Dirac como componentes en el dominio de la frecuencia.

4. REDUCCIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALTO ORDEN

4.1 Análisis de Señales Cosenoidales

En éste numeral se presenta el modo en el que se reducen los términos de alto orden de señales cosenoidales, de igual manera que se presenta en el artículo de Cano y Molina [1]. Teniendo en cuenta que:

$$f(t)=\cos(w_0t) \qquad (24)$$

La representación en el dominio de la frecuencia se da como se ilustra en (25). La representación general se puede efectuar tanto por inducción de los ejemplos aquí mostrados, como por el análisis de las expresiones generales.

$$\cos(w_0 t) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right] \qquad (25)$$

Para la expresión cuadrática

$$\cos^2(w_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi^2}{(2\pi)}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{2*} \qquad (26)$$

Esta expresión se puede reescribir como sigue en (27).

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{(2\pi)}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{2*} = \\ &\frac{\pi^2}{2\pi}\left[\delta^{2*}(w-w_0)+2\delta(w-w_0)*\delta(w+w_0)+\delta^{2*}(w+w_0)\right]\end{aligned} \qquad (27)$$

Al agrupar los términos conjugados se obtiene:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{(2\pi)}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{2*} = \\ &\frac{\pi}{2}\left[\delta(w-2w_0)+\delta(w+2w_0)\right]+\frac{\pi}{2}\left[2\delta(w)\right]\end{aligned} \qquad (28)$$

Aquí el término conjugado se refiere a términos de igual componente armónica o de frecuencia pero de signo contrario.

Teniendo en cuenta las propiedades mencionadas en la sección 3, los procedimientos aquí presentados quedan completamente válidos. Lo anterior muestra un resultado que ya se conoce por su uso regular:

$$\frac{1}{2}\cos(2w_0 t)+\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{\pi}{2}\left[\delta(w-2w_0)+\delta(w+2w_0)\right]+\frac{\pi}{2}\left[2\delta(w)\right] \qquad (29)$$

Y finalmente

$$\cos^2(w_0 t) = \frac{1}{2}\cos(2w_0 t)+\frac{1}{2} \qquad (30)$$

Para la expresión cúbica:

$$\cos^3(w_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi^3}{(2\pi)^2}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{3*} \qquad (31)$$

Esta expresión se puede reescribir como sigue en (32).

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^3}{(2\pi)^2}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{3*} = \\ &\frac{\pi}{4}\left[\delta^{3*}(w-w_0)+3\delta^{2*}(w-w_0)*\delta(w+w_0)\right. \\ &\left.+3\delta(w-w_0)*\delta^{2*}(w+w_0)+\delta^{3*}(w+w_0)\right]\end{aligned} \qquad (32)$$

Al agrupar los términos "conjugados" se obtiene:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{4}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{3*} = \\ &\frac{\pi}{4}\left[\delta(w-3w_0)+\delta(w+3w_0)\right]+\frac{\pi}{4}\left[3\delta(w-w_0)+3\delta(w+w_0)\right]\end{aligned} \qquad (33)$$

Un resultado menos empleado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cos(3w_0 t)+\frac{3}{4}\cos(w_0 t) \leftrightarrow &\frac{\pi}{4}\left[\delta(w-3w_0)+\delta(w+3w_0)\right] \\ &+\frac{\pi}{4}\left[3\delta(w-w_0)+3\delta(w+w_0)\right]\end{aligned} \qquad (34)$$

Para entregar como resultado:

$$\cos^3(w_0 t) = \frac{1}{4}\cos(3w_0 t)+\frac{3}{4}\cos(w_0 t) \qquad (35)$$

Generalizando:

Al analizar detenidamente los resultados se puede verificar que las potencias trigonométricas se pueden convertir fácilmente en la suma de elementos de primer grado con un único cambio en el argumento de las funciones.

Al revisar las expresiones en el dominio de la frecuencia se puede notar que la composición del polinomio convolutivo se puede obtener a partir del uso del triángulo de Pascal. Ahora, cuando se tiene que conseguir la reducción al dominio del tiempo, la mitad de estos elementos desaparecen por cuanto la simetría del triangulo permite agrupar términos semejantes en magnitudes y en su componente armónica.

Basado en lo anterior se propone un nuevo triángulo para la construcción de estas reducciones. Se parte del triángulo tradicional, se eliminan los términos simétricos y cuando en el eje central se encuentre un valor, éste se dividirá por dos. Es necesario tener en cuenta que el divisor de estas cantidades siempre será 2^{n-1}.

Para determinar el valor del armónico, simplemente se van empleando de izquierda a derecha los exponentes así:

El primer armónico corresponde al valor del exponente de la potencia cosenoidal, luego se va restando 2 a cada exponente siempre y cuando este valor sea positivo.

Se ilustra el triángulo original así como el modificado.

$$\begin{array}{lccccccccccc} 0 \rightarrow & & & & & & 1 & & & & & \\ 1 \rightarrow & & & & & 1 & & 1 & & & & \\ 2 \rightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ 3 \rightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ 4 \rightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 5 \rightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array} \qquad (36)$$

El triángulo de Pascal modificado que se denominará el Triángulo de Cano Trigonométrico, en memoria del profesor de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira, se presenta en (37).

$$\begin{array}{ll} 0 \rightarrow & \quad\quad\quad\quad 1 \\ 1 \rightarrow & \quad\quad\quad 1 \\ 2 \rightarrow & \quad\quad 1 \quad 1 \\ 3 \rightarrow & \quad 1 \quad 3 \\ 4 \rightarrow & 1 \quad 4 \quad 3 \\ 5 \rightarrow & 1 \quad 5 \quad 10 \end{array} \tag{37}$$

Basado en Triángulo de Cano, se afirma categóricamente que la potencia de 4 tendrá 3 elementos lineales. Igual cantidad de elementos tendrá la potencia de 5.

Se efectuará el cálculo de los valores para la potencia 5 del coseno y se ilustran los resultados en (38). El lector está invitado a corroborar los resultados aquí planteados.

Potencia de 5	*Coeficiente*	*Armónico*
1^{er} término	1	$5w_0$
2^{do} término	5	$3w_0$
3^{er} término	10	w_0

$$\cos^5(w_0t) = \frac{1}{16}\cos(5w_0t) + \frac{5}{16}\cos(3w_0t) + \frac{5}{8}\cos(w_0t) \tag{38}$$

Los resultados se pueden generalizar para cualquier argumento de la función coseno.

4.2 Análisis de Señales Sinusoidales

En éste numeral se presenta el modo en el que se reducen los términos de alto orden de señales senoidales. Teniendo que:

$$f(t) = sen(w_0t) \tag{39}$$

La representación en el dominio de la frecuencia se da como se muestra en (40).

$$sen(w_0t) \longleftrightarrow j\pi\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right] \tag{40}$$

Para la expresión cuadrática

$$sen^2(w_0t) \longleftrightarrow \frac{(j\pi)^2}{(2\pi)}\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right]^{2*} \tag{41}$$

Esta expresión se puede reescribir como sigue en (42).

$$\begin{aligned} &\frac{(j\pi)^2}{(2\pi)}\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right]^{2*} = \\ &\frac{-\pi^2}{2\pi}\left[\delta^{2*}(w+w_0) - 2\delta(w+w_0) * \delta(w-w_0) + \delta^{2*}(w-w_0)\right] \end{aligned} \tag{42}$$

Al agrupar los términos conjugados se obtiene:

$$\begin{aligned} &\frac{(j\pi)^2}{(2\pi)}\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right]^{2*} = \\ &\frac{-\pi}{2}\left[\delta(w+2w_0) + \delta(w-2w_0)\right] + \frac{\pi}{2}\left[2\delta(w)\right] \end{aligned} \tag{43}$$

Teniendo en cuenta las propiedades mencionadas en la sección 3, se llega a la expresión que se ilustra en (44):

$$-\frac{1}{2}\cos(2w_0t) + \frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\left[\delta(w-2w_0) + \delta(w+2w_0)\right] + \frac{\pi}{2}\left[2\delta(w)\right] \tag{44}$$

Así finalmente

$$sen^2(w_0t) = -\frac{1}{2}\cos(2w_0t) + \frac{1}{2} \tag{45}$$

Para la expresión cúbica:

$$sen^3(w_0t) \longleftrightarrow \frac{(j\pi)^3}{(2\pi)^2}\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right]^{3*} \tag{46}$$

Esta expresión se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} &\frac{(j\pi)^3}{(2\pi)^2}\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right]^{3*} = \\ &\frac{-j\pi}{4}\left[\delta^{3*}(w+w_0) - 3\delta^{2*}(w+w_0) * \delta(w-w_0)\right. \\ &\left.+3\delta(w+w_0) * \delta^{2*}(w-w_0) - \delta^{3*}(w-w_0)\right] \end{aligned} \tag{47}$$

Al agrupar los términos “conjugados” se obtiene:

$$\begin{aligned} &-\frac{j\pi}{4}\left[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\right]^{3*} = \\ &-\frac{j\pi}{4}\left[\delta(w+3w_0) - \delta(w-3w_0)\right] + \frac{j\pi}{4}\left[3\delta(w+w_0) - 3\delta(w-w_0)\right] \end{aligned} \tag{48}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Fourier se obtiene (49):

$$sen^3(w_0t) = -\frac{1}{4}sen(3w_0t) + \frac{3}{4}sen(w_0t) \tag{49}$$

Aplicando el método utilizado para el análisis de la función coseno, se puede desarrollar una expresión que permite descomponer cualquier potencia de la función seno en términos de sus componentes armónicas.

Puesto que dicha función es impar se deben tener presentes las siguientes consideraciones para realizar su análisis:

- **i.** La solución del binomio de Newton aplicado a la transformada de Fourier presenta una variación en los signos como se muestra en (17).
- **ii.** Cuando se tiene un exponente par, el resultado queda expresado en función del coseno.
- **iii.** Cuando se tiene un exponente impar el resultado queda expresado en función del seno

iv. Por último aparece un signo que afecta toda la expresión dependiendo del exponente que se tenga, así:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & (+) & & & & & & 1 \\
1 & \rightarrow & (+) & & & & & 1 & \\
2 & \rightarrow & (-) & & & & 1 & & 1 \\
3 & \rightarrow & (-) & & & 1 & & 3 & \\
4 & \rightarrow & (+) & & 1 & & 4 & & 3 \\
5 & \rightarrow & (+) & 1 & & 5 & & 10 &
\end{array} \tag{50}$$

Para obtener dichos signos se debe multiplicar la expresión por los coeficientes mostrados en (51) y (52):

Para exponentes pares:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \tag{51}$$

Para exponentes impares:

$$(-1)^{\frac{(n+3)}{2}} \tag{52}$$

Basado en la implementación obtenida para el coseno y aplicando nuevamente el método del Triángulo de Cano Trigonométrico es necesario recordar que el divisor de los coeficientes siempre será 2^{n-1}. A continuación se ilustrarán algunos ejemplos.

Potencia de 6	***Coeficiente***	***Armónico***
1^{er} término	1	$6w_0$
2^{do} término	6	$4w_0$
3^{er} término	15	$2w_0$
4^{to} término	10	0

$$sen^6(w_0 t) = -\frac{1}{32}\left[\cos(6w_0 t) - 6\cos(4w_0 t) + 15\cos(2w_0 t) - 10\right] \tag{53}$$

Potencia de 7	***Coeficiente***	***Armónico***
1^{er} término	1	$7w_0$
2^{do} término	7	$5w_0$
3^{er} término	21	$3w_0$
4^{to} término	35	w_0

$$sen^7(w_0 t) = -\frac{1}{64}\left[sen(7w_0 t) - 7sen(5w_0 t) + 21sen(3w_0 t) - 35sen(w_0 t)\right] \tag{54}$$

Se invita al lector a verificar los resultados ilustrados anteriormente.

5. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

Se ha presentado una manera de simplificar potencias trigonométricas.

Las transformaciones en el dominio de la frecuencia aún hoy día permiten obtener resultados y procedimientos que evitan tomar caminos largos en el desarrollo matemático y análisis cualitativo.

La transformación presentada y la forma simplificada permiten reducir el uso de tiempo de cómputo, la complejidad computacional y entrega una representación armónica de señales de alto orden. Importante es tener en cuenta que el procedimiento presentado en éste artículo es novedoso y sencillo de seguir.

Se ha programado ésta forma de simplificar las expresiones trigonométricas y estará disponible en la dirección http://elcondensador.net/pages/cursos/trigonometricas.php

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] CANO, A. MOLINA, A. "Una Forma de Simplificar Potencias Trigonométricas", Año XV, No 41, Mayo de 2009. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN0122-1701.

[2] LATHI, B. P. Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación, Primera Edición en Español, Noriega Editores, México D.F., 2002.

[3] HSU, H. P. Análisis de Fourier. México, 1973.

[4] OPPENHEIM, A. V. Señales y sistemas. Segunda Edición en Español. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1998.

[5] Valencia J, "Métodos Híbridos para el Estudio de la Propagación de Campos Electromagnéticos". Tesis de Grado UTP. Pereira-Risaralda.

[6] Van Valkenburg M. E.., "Análisis de Redes". Ed. Limusa. México 1983.

[7] Zwiluncer D., "Standard Mathematical Tables And Formula". Ed CRC. New York 2003.

[8] Papoulis, A., "The Fourier Integral and Its Applications". McGraw-Hill. New York. 1962.

[9] Simmons, F. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. McGRAW-HILL. México D.F. 1977.

[10] Britton, J "Matemáticas Universitarias". Editorial CECSA. México D.F. 1970.