EQUIVALENCIA GEOMÉTRICA EN FLUJOS DE CLASE C^2 EN SISTEMAS PLANARES

Geometric equivalence in flows of C^2 class in systems planar

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

OSCAR FERNÁNDEZ SÁNCHEZ
Ms.C. Matemáticas
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

RESUMEN
En este artículo se demuestra la existencia de un criterio de equivalencia de flujos de clase C^2 el cual puede diferenciar no sólo formas topológicas si no también formas geométricas (de nodos, focos y sillas topológicas).
PALABRAS CLAVES: *Bifurcación, equivalencia topológica, equivalencia geométrica ,nodos, focos, sillas.*

ABSTRACT
In this paper demonstrates the existence of a criterion of equivalence of flows of C^2 class which can differentiate not only topological forms if not also geometric forms (of nodes, centers and topological saddles).

KEYWORDS: *Bifurcation, topological equivalent, geometric equivalent, nodes, focus , saddles.*

1. INTRODUCCIÓN.

Cuando en un sistema autónomo el campo $f(x) \in C^1$ es posible clasificar los retratos de fase del sistema con base en el criterio de equivalencia topológica el cual preserva información sobre el número, estabilidad, y topología de los conjuntos invariantes, mientras se puede perder información sobre el comportamiento transiente, dependiente del tiempo y la geometría de los retratos de fase. Por ejemplo la equivalencia topológica entre flujos del sistemas alrededor de puntos hiperbólicos del tipo nodo y del tipo foco es bien establecida [kuznetzov, 1995]; sin embargo su comportamiento transiente y geométrico difieren en la dinámica del sistema y resulta importante en algunas aplicaciones poder diferenciar entre ellos como es el caso de los sistemas no suaves, donde se ha observado que la estabilidad y la atractividad de ciertos conjuntos invariantes depende tanto de la componente real como imaginaria de sus valores propios de la linealización del sistema.

Fecha de Recepción: 12 de Mayo de 2011
Fecha de Aceptación: 29 de Agosto de 2011

Indicaremos por $X^r(A)$ el conjunto de campos de vectores $X : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^r, r \geq 1$, donde $A \subset G$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Ahora se define el concepto de equivalencia topológica y equivalencia geométrica los cuales contribuyen a definir el concepto de bifurcación en sistemas dinámicos.

Definición: Los sistemas dinámicos diferenciables $(M, \varphi, \mathbb{R})$ y $(\hat{M}, \hat{\varphi}, \mathbb{R})$ son topológicamente equivalentes en las vecindades $V \subset M$ y $U \subset M$ si existe un homeomorfismo $h : V \to U$ y una función creciente $\tau : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que lleva las órbitas de V sobre las órbitas de U preservando la orientación a lo largo de éstas, es decir

$$h(\varphi(x,t)) = \hat{\varphi}(h(x), \tau(x,t)), \forall (x \in V, t \in \mathbb{R})$$

Decimos que los sistemas dinámicos son C^r equivalentes si son topológicamente por medio de un homeomorfismo que es de clase C^r.

Nótese que la equivalencia topológica aplica órbitas en órbitas, y preserva el sentido de recorrido de tales órbitas, pero los puntos de la órbita imagen se pueden recorrer a distinta velocidad. Cuando tenemos una equivalencia que preserva la parametrización del tiempo a lo largo de cada órbita, entonces decimos que es una conjugación de sistemas dinámicos o de campos según se use el lenguaje de los flujos o de campo vectoriales.

2. Equivalencia geométrica: Si en un sistema autónomo el campo $f(x) \in C^2$ entonces es posible establecer un criterio de clasificación geométrica más refinado para los escenarios (conjunto de bifurcaciones) en un entorno U de un punto de equilibrio aislado de tipo hiperbólico en el plano, la cual se realiza con base en una modificación del criterio de la equivalencia lineal y de algunos teoremas que establecen la misma estructura cualitativa entre el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \in C^2$$

y la del sistema lineal

$$\dot{x} = Df(x_0) \in C^2$$

cerca a un punto de equilibrios hiperbólico x_0 del tipo nodo, tipo foco o del tipo silla. Este criterio es útil para clasificación de bifurcación de de zip en sistemas suaves y también para extender la dinámica de la bifurcación de zip a sistema no suaves (suave por tramos). Para establecer el criterio de equivalencia geométrica nos restringimos a sistemas planos.

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (1)$$

El sistema no lineal (1) puede ser escrito en términos de coordenadas polares como

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r\cos\theta, rsen\theta)\cos\theta + f_2(r\cos\theta, rsen\theta)sen\theta \\ f_2(r\cos\theta, rsen\theta)\cos\theta - f_1(r\cos\theta, rsen\theta)sen\theta \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, 0 \le \theta < 2\pi.$$

A continuación se dan definiciones geométricas precisas para centro, foco, centro foco estable e inestable, nodo estable e inestable y silla topológica de sistemas no lineales (1), véase [Perko L., 2000]. Se asume que $x_0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio del sistema no lineal (1) el cual ha sido trasladado al origen $r(t,r_0,\theta_0)$ y $\theta(t,r_0,\theta_0)$ denotan la solución del sistema no lineal con $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$.

Definición 1: El origen es llamado un centro para el sistema no lineal (1) si existe un $\alpha > 0$, tal que toda curva solución de (1) en un entorno reducido con centro en el origen $N_\delta(0) - \{0\}$ es una curva cerrada con el origen en su interior.

Definición 2: El origen es llamado un centro-foco para el sistema no lineal (1) si existe una secuencia de curvas solución cerradas Γ_n con Γ_{n+1} en el interior de Γ_n tal que $\Gamma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y tal que toda trayectoria entre Γ_n y Γ_{n+1} se desenrolla hacia Γ_n o Γ_{n+1} cuando $t \to \pm$.

Definición 3: El origen es llamado un foco para el sistema no lineal (1) si existe un $\delta > 0$, tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in R$, $r(t,r_0,\theta_0) \to 0$, y $|\theta(t,r_0,\theta_0)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Es llamado un foco inestable si $r(t,r_0,\theta_0) \to 0$, y $|\theta(t,r_0,\theta_0)| \to \infty$ cuando $t \to -\infty$. Cualquier trayectoria del sistema no lineal (1) la cual satisface $r(t,r_0,\theta_0) \to 0$, y $|\theta(t,r_0,\theta_0)| \to \infty$ cuando $t \to \pm\infty$ se dice que es un punto espiral hacia adelante del origen cuando $t \to \pm\infty$.

Definición 4: El origen es llamado un nodo estable para el sistema no lineal (1) si existe un $\delta > 0$, tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t,r_0,\theta_0) \to 0$, y

$|\theta(t, r_0, \theta_0)| < \infty$, cuando $t \to \infty$, es decir cada trayectoria en un entorno reducido con centro en el origen $N_\delta(0) - \{0\}$ se acerca al origen a lo largo de una línea tangente bien definida cuando $t \to \infty$. El origen es llamado un nodo inestable si $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$, y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| < \infty$ para $r_0 \in (0, \delta)$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ cuando $t \to -\infty$. El origen es llamado un nodo propio para el sistema no lineal (1) si éste es un nodo y además todo rayo a través del origen es tangente para alguna trayectoria de (1).

Definición 5: El origen es una silla topológica para el sistema no lineal (1) si allí existen dos trayectorias Γ_1 y Γ_2 las cuales se acerca al origen cuando $t \to \infty$ y dos trayectorias Γ_3 y Γ_4 la cuales se acercan al origen cuando $t \to -\infty$ y si existe un $\delta > 0$, tal que todas las otras trayectorias las cuales empiezan en un entorno reducido con centro en el origen $N_\delta(0) - \{0\}$ alcanzan $N_\delta(0)$ cuando $t \to \pm\infty$. Las trayectorias $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$ son llamadas separatrices.

Para una silla topológica, la variedad estable en el origen es $S = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \{0\}$ y la variedad inestable en el origen es $U = \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4 \bigcup \{0\}$. Si la trayectoria T_i se acerca al origen a lo largo de un rayo haciendo un ángulo θ_i con el eje-x donde $\theta_i \in (-\pi, \pi]$ para $i = 1, \ldots, 4$, entonces $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi \pm$ y $\theta_4 = \theta_3 \pm \pi$. Esto se sigue de considerar las posibles direcciones en las cuales una trayectoria de (1), escrita en coordenadas polares (2), pueden acercarse al origen dado por la dirección de β la cual satisface:

$$b \sin^2 \theta + (a - d) \sin \theta \cos \theta - c \cos \theta = 0, \textit{ donde}$$
$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Como una consecuencia inmediata del teorema de la variedad estable y el teorema de Harman-Grobman. Se establece que si el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (1), entonces este es una silla topológica para el sistema (1) si y únicamente si es una silla topológica para su linealización en el origen.

Teorema 1. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el origen y sea $f \in C^2(E)$. Suponga que el origen es punto crítico hiperbólico del sistema (1). Entonces el origen es silla topológica del sistema no lineal (1) si y únicamente si éste es una silla para el sistema lineal asociado a (1) en el origen de

$$\dot{x} = Df(0)x$$

El próximo teorema probado en [Andronov-Leontovich, 1973] muestra que bajo hipótesis más fuertes $f \in C^2(E)$ se tiene que nodos y focos del sistema lineal persisten bajo la adición de términos no lineales.

Teorema 2. Considere E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el origen y sea $f \in C^2(E)$. Suponga que el origen es punto crítico hiperbólico del sistema (1). Entonces el origen es nodo estable (o inestable) del sistema no lineal (1) si y únicamente si este es un nodo estable (o inestable) del sistema, para el sistema lineal asociado a (1) en el origen

$$\dot{x} = Df(0)x$$

y el origen es foco estable (o inestable) del sistema no lineal (1) si y únicamente si éste es un foco estable (o inestable) del sistema para el sistema lineal asociado a (1) en el origen.

A continuación se estable un criterio de partición (equivalencia geométrica) de flujos lineales hiperbólicos teniendo en cuenta la estructura de valores propios de la matriz del sistema la cual determina a su vez una partición (equivalencia geométrica) de los flujos no lineales de clase C² como consecuencia de los teoremas1 y el teorema2

Definición 6: Considere los sistema lineales

$$\dot{x} = Df_1(0)x \qquad (3)$$

$$\dot{x} = Df_2(0)x \qquad (4)$$

Se puede asumir sin pérdida de generalidad que la matriz de coeficiente $Df_k(0), k=1,2$; tiene $s_k \geq 0$ valores propios reales con parte real negativa, $c_k \geq 0$ valores propios con parte real cero, $u_k \geq 0$ valores propios reales con parte real positiva y $sc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real negativa, $uc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real positiva ; contando la multiplicidad en el polinomio característico de $Df_k(0)$ se tiene que $s_k+c_k+u_k+sc_k+uc_k=n_k$. Entonces decimos que el sistema (3) es geométricamente equivalente al sistema (4) si y sólo si son topológicamente equivalentes y además

$$s_1=s_2;c_1=c_2;u_1=u_2;sc_1=sc_2;uc_1=uc_2$$

Se observa claramente que la definición anterior particiona los sistemas lineales hiperbólicos cerca el origen en clases de sistemas las cuales son equivalentes a nodos, focos o sillas. Si el flujo es no hiperbólico este se clasifica por el criterio de equivalencia topológica, el cual de hecho particiona los flujos no-hiperbólicos.

A continuación se presenta la definición de flujos equivalentes para sistemas autónomos entorno de un punto equilibrio:

Definición 7: Considere los sistemas no lineales autónomos de clase C² siguientes

$$\dot{x} = f_1(x) \qquad (4)$$

$$\dot{x} = f_2(x) \qquad (5)$$

y

$$\dot{x} = Df_1(0)x \qquad (3)$$

$$\dot{x} = Df_2(0)x \qquad (4)$$

sus sistemas lineales asociados con respecto al origen de coordenadas. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que la matriz de coeficientes $Df_k(0)$ tiene $s_k \geq 0$ valores propios reales con parte real negativa, $c_k \geq 0$ valores propios con parte real cero, $u_k \geq 0$ valores propios reales con parte real positiva y $sc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real negativa, $uc_k \geq 0$ valores propios complejos con parte real positiva ; contando la multiplicidad en el polinomio característico de $Df_k(0)$, luego se tiene que $s_k+c_k+u_k+sc_k+uc_k=n_k$. Entonces decimos que el sistema (4) es equivalente geométricamente al sistema (5) cerca al origen si y sólo si son topológicamente equivalentes cerca al origen y además

$$s_1=s_2;c_1=c_2;u_1=u_2;sc_1=sc_2;uc_1=uc_2.$$

Se observa claramente que la definición anterior particiona los sistemas no-lineales hiperbólicos de clase C² cerca el origen en clases de sistemas las cuales son equivalentes a nodos, focos o sillas topológicas. Si el flujo es no-hiperbólico de clase C² éste queda clasificado por el criterio de equivalencia topológica el cual de hecho particiona los flujos no-hiperbólicos de clase C².

La definición geométrica de equivalencia de flujos de sistemas no lineales de clase C² cerca el origen es claramente consistente por la definición 6 de equivalencia geométrica en sistemas lineales y la correspondencia establecida por los teoremas 1 y 2 entre los flujos del sistema no-lineal cerca el origen de un punto tipo nodo, foco o silla y los flujos del sistema lineal asociado cerca el origen de un punto tipo nodo, foco o silla, respectivamente. Esta definición puede extenderse a mayor dimensión; en el caso de la bifurcación zip es suficiente ya el espacio de estados es particionado por variedades invariantes de dimensión dos. Se observa también que la definición 7 de equivalencia geométrica permite tratar los cruces de ambos ejes coordenados por los valores propios de la linealización del sistema al variar el parámetro como bifurcaciones geométricas del sistema. Así un cambio de retrato de fase de un nodo a un foco (cruce del eje real) se considera una bifurcación. Desde este punto de vista el tratamiento de los distintos escenarios reciben un tratamiento más simétrico con respecto a la dinámica de los valores propios, ya que en este caso el eje imaginario no es privilegiado.

A continuación definimos el concepto de estabilidad topológicamente (geométricamente) estructuralmente estable el cual puede ser encontrado en [5].

Definición 8: Si $X^1(A)$, entonces la C¹-norma de f se define como

$$\| f \|_1 = \sup_{x\in A} | f(x) | + \sup_{x\in A} | f'(x) |$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclideana sobre $\mathbb{R}^n$, y $\|\cdot\|$ denota la norma usual matricial. La función $\|\cdot\| : X^1(A) \to \mathbb{R}$ define una norma y el conjunto de funciones $X^1(A)$ acotadas con la norma C¹-norma es un espacio normado completo (espacio de Banach). Nosotros usamos la C¹-norma para definir la medida de la distancias entre cualesquiera dos funciones campos de $X^1(A)$.

Definición 9: Considere el sistema dinámico diferenciable $(X, \varphi, \mathbb{R})$ y la vecindad $A \subset M$. Un campo $f \in X^1(A)$ se dice topológicamente (geométricamente) estructuralmente estable, si existe un $\varepsilon > 0$, tal que para todo $g \in X^1(A)$ con

$$\| f - g \|_1 < \varepsilon$$

f y g son topológicamente (geométricamente) equivalente sobre A.

Si el sistema es estructuralmente estable en el sentido de la definición 9, éste puede ser utilizado como un modelo matemático del mundo real, y por lo tanto puede esperarse resultados satisfactorios, ya que pequeñas perturbaciones no cambia el comportamiento cualitativo de la solución.

1. CONCLUSIÓN

Se ha demostrado la existencia de un criterio de equivalencia de flujos de clase C^2 el cual puede diferenciar no sólo formas topológicas si no también formas geométricas (de nodos, focos y sillas topológicas). Esto resulta importante en el estudio de la dinámica no-suave donde se ha observado, que la estabilidad y la atractividad de ciertos conjuntos invariantes depende tanto de la componente real como imaginaria de sus valores propios de la linealización del sistema.

2. **Agradecimientos**: Agradecimiento al Profesor Gerard Olivar por su amable y acertada orientación en esta investigación.

3. BIBLIOGRAFÍA

1. Kuznetsov, Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer Verlag, New York. 1995
2. Hartman, P. Orinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964.
3. Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon and Maier, A. G. Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems, John Wiley and Sons, New York, 1973
4. Olivar, G., Ángulo, F., di Bernardo, M. Hopf-Like transitions in nonsmooth dynamical systems.In Proceedings IEEE ISCAS, vol. 4, pp. 693-696 (2004). ISBN 0-7803-8251-X.
5. Farkas, M. Motions. Periodic. New York: Springer-Verlag, 1994.