

Modelación matemática para el análisis térmico de fenómenos por medio de dominios semi-infinitos

Mathematical modeling for the thermic analysis of phenomena by way of semi-infinitive domains

Gustavo Suárez Guerrero, Juan Sebastián Parra Sánchez, Sebastián Aristizabal Suárez
Escuela de Ingenierías, Centro de Ciencia básica, Grupo de Matemáticas, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia
 Correo-e: gustavo.suarez@upb.edu.co

Resumen— Se presenta un análisis matemático de la ecuación de calor, en la búsqueda de su deducción; la comprensión de las variables y parámetros que interactúan en ésta y la caracterización de cada uno de ellos. Finalmente, se encuentra su solución y simulación, teniendo en cuenta el significado físico y matemático, enmarcado en el análisis de los dominios semi-infinitos y cerrados.

Palabras clave— Ecuaciones, Series de Fourier, Modelo matemático, Factores térmicos.

Abstract— A mathematical analysis of the equation of heat is presented, in search of its conclusion; the understanding of the variables and parameters which interact in this, and the characterization of each. Finally, the solution and simulation are found taking into account the physical and mathematical meaning, framed in the analysis of two semi-infinite and close domains.

Key Word —equations, Fourier series, mathematical model, thermal factors.

I. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de transferencia de calor [1], [2] son de gran interés y aplicación diferentes campos de ingeniería [3]. Se pretende estudiar este tipo de fenómenos en dominios semi-infinitos y cerrados, bajo condiciones físicas que inciden en su comportamiento, con la solución de la ecuación de calor [4]. Para la comprensión del fenómeno, se requiere de una sólida base conceptual y de un manejo riguroso de la matemática y las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales de orden superior.

El estudio de la transferencia de calor, conlleva a un análisis sobre la transferencia de energía, las condiciones de contorno y sobre todo de las leyes de la Termodinámica, [5]

proporcionando un conocimiento más general de dicha temática, de posterior aplicación en la modelación de partículas y nano-estructuras.

II. CONTENIDO

A. Introducción al fenómeno

Antes de abordar el estudio del fenómeno, es necesario considerar algunos conceptos relacionados, como lo son la conductividad y difusividad térmica.

En 1822, J.B Fourier propone la ley que rige la conducción del calor, la cual expone que en un material homogéneo, el flujo del calor es proporcional a menos el gradiente de la temperatura local [6], este signo indica que el flujo de calor se direcciona desde el punto más caliente hacia el punto más frío, introduciendo una constante, conocida como conductividad térmica y que se define como la propiedad de los cuerpos capaces de conducir el calor [7].

La difusividad térmica, nombrada en este artículo como a , físicamente indica cómo se propaga el calor por un material, dicha magnitud de a señala el ritmo del fluido y relaciona el flujo de energía con el gradiente de energía [8].

Para el estudio del fenómeno de calor se considera una barra de un material conductor de longitud L con determinada densidad, en la que la superficie de dicha barra es aislada, por tanto, no se pierde ni se gana energía a través de esta. Teniendo un área transversal $A(x)$, el problema con estas condiciones se trabaja como unidimensional, por simplicidad.

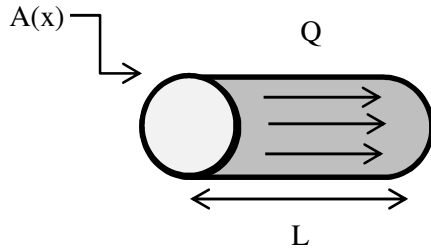


Figura 1. Flujo de calor en una barra de longitud L y a través de un área transversal A(x).

Usando el primer principio de la conservación de la energía [9], sabemos que:

$$dQ = c(pAdx)\theta \quad (1)$$

Integrando a ambos lados, se obtiene:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)p(x)A(dx)\theta(x,t)dx \quad (2)$$

Donde: p es la densidad (g/cm^3), A es el área transversal (cm^2), c es la constante de calor dada en ($\text{cal/g}^\circ\text{C}$) y θ es la Temperatura ($^\circ\text{C}$).

Según la ley de Fourier para la conducción del calor [6], el flujo neto de calor a través de la barra entre dos extremos x_1 y x_2 está dado por:

$$N(t) = A(x)k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) \quad (3)$$

Donde k, es la constante de conductividad térmica en $\text{cal/cm s}^\circ\text{C}$, y la producción de calor dada por las fuentes internas (si las hay) será denotado por H(t) y está dada por:

$$H(t) = \int_{x_1}^{x_2} h(x,t)p(x)A(x)dx \quad (4)$$

$h(x,t)$ relaciona el calor producido por unidad de masa y tiempo en las fuentes y está dado en (cal/g s).

Consecutivamente, por conservación del calor [10] y sabiendo que la superficie es aislada, se cumple que:

$$\frac{dQ}{dt} = N(t) + H(t) \quad (5)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (5):

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} c(x)p(x)A(x)\theta(x,t)dx - A(x)k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) - \int_{x_1}^{x_2} h(x,t)p(x)A(x)dx = 0$$

Finalmente, derivando con respecto a t y agrupando en un solo término las integrales la ecuación queda:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ c(x)p(x)A(x)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x)k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x} \right] h(x,t)p(x)A(x) \right\} dx = 0 \quad (6)$$

Debido a la condición de la integral igualada a cero [11], teniendo el área constante y las propiedades del material definidas, si se divide la ecuación (6) por $c(x)p(x)A(x)$ se obtiene:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \frac{k}{cp} = \sigma(x,t) \quad (7)$$

Hacemos $a = \frac{k}{cp}$ que como se nombró anteriormente, corresponde a la difusividad térmica. La función de $\sigma(x,t)$ corresponde a la disipación de energía, que para este caso se tomará como cero, entonces la ecuación a desarrollar es:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

B. Solución de la ecuación

1. Dominios cerrados

Para el desarrollo de la ecuación (8), se supone una solución del tipo $\theta(x,t) = \varphi(x)T(t)$. [12] Con $\theta = 0$ en los extremos de la barra. Como θ es una solución de (8) se reemplaza:

$$\frac{\partial\varphi(x)T(t)}{\partial t} - a\frac{\partial^2\varphi(x)T(t)}{\partial x^2} = 0$$

Por las propiedades de la derivada [13], los términos constantes quedan multiplicando:

$$\varphi(x)\frac{\partial T}{\partial t} = aT(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

De donde:

$$\frac{1}{aT}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

Desarrollando mediante separación de variables [14], se asigna una constante arbitraria que llamaremos λ . Buscando una solución diferente a la trivial, el valor de λ no podrá ser cero ni un valor negativo [15] dadas las condiciones para el problema:

$$\frac{1}{aT}\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (9)$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\lambda^2 \quad (10)$$

La ecuación (9) se puede resolver por separación de variables, integrando en ambos lados:

$$\int_0^T \frac{\partial T}{T} = a \int_0^t -\lambda^2 \partial t$$

$$\ln|T| = -a\lambda^2 t$$

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a t} \quad (11)$$

La ecuación (10) es lineal homogénea y su ecuación característica [16] es:

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \quad m = 0 \pm \lambda i$$

$$\varphi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sen(\lambda x) \quad (12)$$

La solución θ está dada como el producto de estas dos soluciones (11) y (12):

$$\theta(x, t) = (A\cos(\lambda x) + B\sen(\lambda x)) e^{-\lambda^2 a t} \quad (13)$$

Por las condiciones iniciales del problema [12] reemplazando en (13) $\theta(0, t) = 0$:

$$0 = (A\cos(0) + B\sen(0))e^{-\lambda^2 a t}$$

$$Ae^{-\lambda^2 a t} = 0$$

El término que contiene e no puede ser cero [17], por lo tanto $A = 0$. Así la solución queda:

$$\theta(x, t) = B\sen(\lambda L)e^{-\lambda^2 a t} \quad (14)$$

Debido a que B no puede ser cero, porque nos daría la solución trivial y tomando una longitud L de la barra (de x_1 a x_2), para el cual $\theta(L, 0) = 0$ tenemos:

$$\sen^{-1}(0) = \lambda L$$

$$\lambda = 0 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{L} \dots \frac{n\pi}{L}$$

$$\theta(x, t) = B\sen\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a t} \quad (15)$$

La ecuación (15) puede reconocerse como el desarrollo de la serie de Fourier de senos, y dado que la función seno, es una función impar, se tiene que:

$$\theta(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sen\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a t}$$

con $n=1,3,5,\dots$

C. Dominios semi-infinitos

Si se impone un cambio súbito de temperatura en el extremo de una barra semi-infinita ocurrirá un fenómeno de transferencia de calor conducido de manera unidimensional a través del sólido. Este tipo de fenómenos proporciona una idealización útil para muchos problemas de ingeniería [1]. Cuando se pone en contacto la barra con otro sólido a Temperatura T_s y el sólido semi-infinito es un metal conductor, se provoca un cambio súbito en la Temperatura del sólido. La función para θ está dada por:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$$

$$T_s = T(0, t)$$

Donde T_0 , es la temperatura inicial de la barra.

Para el desarrollo de la ecuación (8) con dominios semi-infinitos se utiliza una variable de similitud [16] que llamaremos u .

$$u = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad (16)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{-x}{4\sqrt{a}} t^{-3/2} \quad (17)$$

Por regla de la cadena [13],

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du} \left(\frac{du}{dt}\right) \quad (18)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d\theta}{du} \left(\frac{1}{2\sqrt{at}}\right) \quad (19)$$

De (17) se tiene que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du} \left(\frac{-x}{4\sqrt{a}} t^{3/2}\right)$$

Por regla de la cadena y de (19):

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\sqrt{at}} \frac{d\theta}{du}\right) = \frac{1}{4at} \frac{d^2\theta}{du^2} \quad (20)$$

Sustituyendo (19) y (20) en (8):

$$\left(\frac{-x}{4\sqrt{a}} t^{3/2}\right) \frac{d\theta}{du} = a \frac{1}{4at} \frac{d^2\theta}{du^2}$$

Utilizando las propiedades de los exponentes y ley uniforme de la igualdad [17] se simplifica la expresión:

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{at}}\right) \frac{d\theta}{du} = \frac{d^2\theta}{du^2} \quad (21)$$

Sustituyendo (16) en (21)

$$-2u \frac{d\theta}{du} = \frac{d^2\theta}{du^2} \quad (22)$$

La ecuación (22) que resulta es una ecuación diferencial no lineal de orden dos, para resolverla se utiliza la sustitución:

$$\frac{d\theta}{du} = \phi \quad (23)$$

Sabiendo que $\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{d\theta}{du} \right) = \frac{d\phi}{du}$ y remplazando (23) en (22)

$$\frac{d\phi}{du} = -2u\phi \quad (24)$$

Esta es una ecuación que puede resolverse por variables separables, integrando (24) a ambos lados se obtiene:

$$\int \frac{d\phi}{\phi} = \int -2udu$$

$$\ln|\phi| = -u^2 + \ln|C|$$

Por propiedades de la función exponencial [13]

$$\phi = Ce^{-u^2}$$

De la ecuación (23), buscando la solución en la variable θ , se integra a ambos lados y se evalúan las condiciones de frontera.

$$\frac{d\theta}{du} = Ce^{-u^2}$$

$$\theta = C \int e^{-u^2} du + D \quad (24)$$

Para conocer el valor de C, se tiene que $\theta(0, t) = 1$ esto dado que no ha habido un cambio en la temperatura y la relación entre T -To y Ts-To es 1, en el extremo de la barra. Con estas condiciones y con la variable de similitud de (16) se encuentra que:

$$u(0, t) = \frac{0}{2\sqrt{at}} = 0 \quad (25)$$

De la condición para θ y de (25) en (24):

$$1 = C \int e^{-0^2} du + D$$

$$1 = C \int (1) du + D$$

De (25), da como resultado el valor de la constante D:

$$1 = Cu + D; \quad D = 1$$

Para una segunda condición del problema, en dominios semi-infinitos se tiene que cuando $x \rightarrow \infty$; $\theta = 0$, al remplazar en (24) se obtiene:

$$0 = C \int_0^\infty e^{-u^2} du + 1 \quad (26)$$

Para obtener el valor de $\int_0^\infty e^{-u^2} du$, se realiza lo siguiente:

$$\xi = \int_0^\infty e^{-u^2} du \quad \xi = \int_0^\infty e^{-v^2} dv \quad (27)$$

Es posible obtener un mismo valor de ξ indiferente de la letra para la variable escogida. Si se realiza un producto entre ξ y se aplica propiedad transitiva de la igualdad se obtiene:

$$\xi^2 = \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-v^2} dv$$

Lo que conduce a obtener una integral doble en las variables u y v .

$$\xi^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-v^2} e^{-u^2} du dv$$

$$\xi^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(v^2+u^2)} du dv$$

Utilizando coordenadas polares con $r^2 = v^2 + u^2$ y $dudv = r dr ds$ para el desarrollo de la esta integral, se consigue que:

$$\xi^2 = \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-(r^2)} r dr ds \quad (28)$$

El límite para ds está dado por el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ entre u y v , en el primer cuadrante pues ambos son positivos. Integrando con respecto a r :

$$\xi^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-1}{2} e^{-(r^2)} \right]_0^\infty ds$$

$$\xi^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-1}{2} e^{-(r^2)} \right]_0^\infty ds$$

Evaluando los límites, se obtiene:

$$\xi^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} ds$$

$$\xi^2 = \frac{1}{4} \pi \quad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Consecutivamente, comparando con la ecuación (27) se obtiene el valor de la constante en la ecuación (26):

$$C = \frac{-2}{\sqrt{\pi}}$$

Sustituyendo los valores para las constantes halladas en (24) se obtiene una solución particular para θ :

$$\theta = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-u^2} du + 1 = \text{ferc}(u) \quad (29)$$

La ecuación (26) se define como la $\text{ferc}(u)$ [16]. Finalmente se reemplaza el valor de u , como variable de similitud.

$$\theta = \text{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

2.3 Resultados de la simulación, análisis y discusión

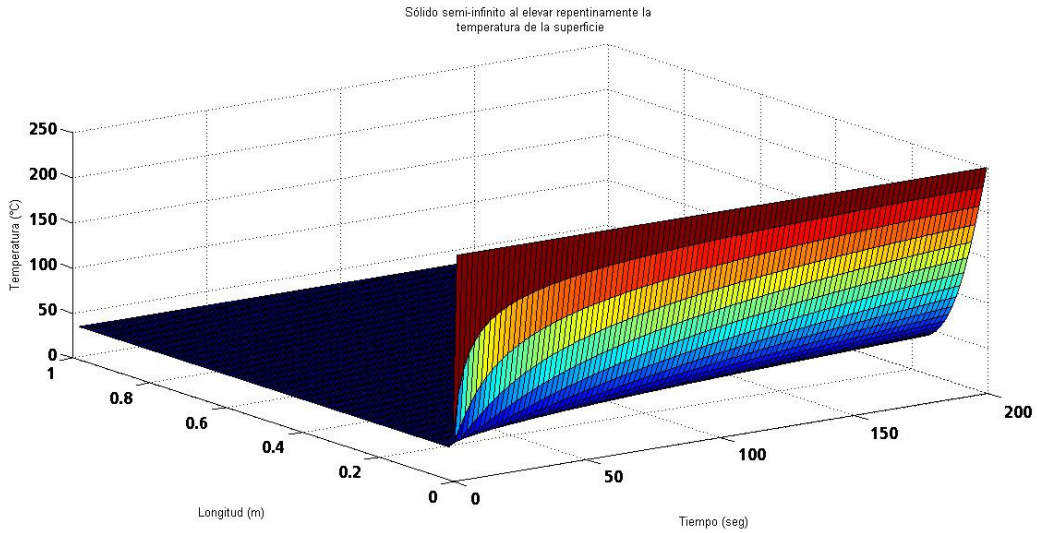


Figura 2. Sólido semi-infinito

Sólido infinito

aumento súbito la temperatura de la superficie.

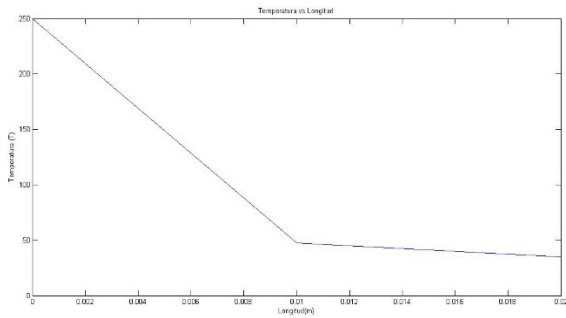


Figura 3. Temperatura vs Longitud (Sólido semi-infinito al elevar repentinamente la temperatura de la superficie). Tiempo constante.

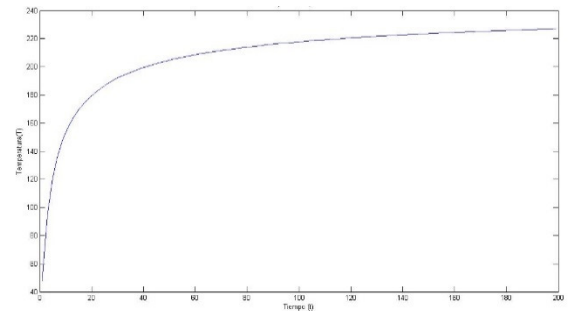


Figura 4. Temperatura vs tiempo (Sólido semi-infinito al elevar repentinamente la temperatura de la superficie). Longitud constante.

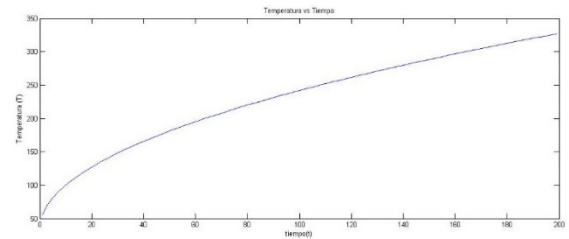


Figura 5. Temperatura vs Tiempo (Sólido semi-infinito sometido a un flujo de calor constante).

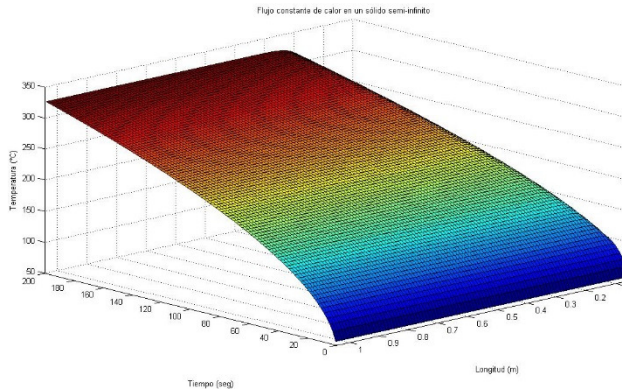


Figura 6. Sólido semi-infinito sometido a un flujo de calor constante.

Con el fin de una mejor observación para la solución encontrada, se desarrollaron una serie de simulaciones de ésta, arrojando resultados para el comportamiento del fenómeno, como una función del tiempo y de la longitud de la barra tratada a nivel unidimensional.

La solución analítica graficada arrojó los siguientes resultados, que son analizados en su comportamiento: En la **figura 2** se aplica una temperatura repentina en el extremo, mucho mayor a la inicial T_0 del sólido semi-infinito; cuando la longitud no supera una cota superior hay una variación de la temperatura con respecto al tiempo en el orden exponencial (**figura 4**) que después de cierto tiempo t se estabiliza (se vuelve constante).

Para longitudes muy cercanas a $x=0$, la temperatura es mayor y como se observa en la **figura 3**, disminuye rápidamente.

En la **figura 4**, se observa que el intercepto con el eje y es la temperatura inicial T_0 y aumenta conforme al tiempo hasta estabilizarse, con una longitud constante.

Cuando hay un flujo de calor constante en el sólido semi-infinito la temperatura aumenta uniformemente en la longitud pero no hay una variación considerable en el tiempo, debido a que es un cambio que sucede muy rápidamente y es de orden exponencial, entendiendo que el tiempo y la longitud son las variables independientes, observado en las **figuras 5 y 6**.

III. CONCLUSIONES

En el análisis transitorio de la conducción de calor en la barra, antes de alcanzar el equilibrio, se hizo necesario ajustar las condiciones de contorno relacionadas con la situación física,

según el dominio del problema a tratar y basados en el método apropiado para la solución matemática del problema.

La solución encontrada para los dominios semi-infinitos condujo a acercamiento a la realidad del fenómeno, dada su amplia aplicación en procesos en los que influye la transferencia de calor como en aplicaciones industriales y gran número de fenómenos en los cuales se desea conocer la temperatura de un sólido cuando sucede un cambio abrupto de uno de sus extremos y se desconoce la ubicación del otro, o es una magnitud mucho mayor a la del radio de dicha barra.

La deducción de la ecuación a nivel matemático permitió ahondar en el estudio de cada una de las propiedades que quedan implícitas en la ecuación desarrollada, tanto para dominios cerrados como semi-infinitos, lo que influyó considerablemente en la búsqueda correcta de las condiciones necesarias, para una congruencia entre lo físico y lo matemático.

REFERENCIAS

- [1] J.P Holman. “*Transferencia de calor*”, Editorial Mc Graw Hill, Madrid 1998.
- [2] M.J Morán, H.N. Shapiro. “*Fundamentos de termodinámica técnica*” volumen 2, capítulo 2.4 *Transferencia de energía por calor*, Editorial Reverté, Barcelona 1995.
- [3] J.B Corbín, “*Transferencia de Calor en Ingeniería de Alimentos: Formulación Y Resolución de Casos Prácticos*”, Editorial Universidad Politécnica, Valencia 2006.
- [4] Peter V. O’Neil, “*Matemáticas avanzadas para Ingeniería*”, capítulo 6, sexta edición, Editorial Cengage Learning Editores, 2008.
- [5] K C. Rolle, “*Termodinámica*”, Sexta edición, Editorial Pearson Educación, 2006.
- [6] S. Burbano de Ercilla, C. G Muñoz, “*Física General*”, capítulo 15 *El calor y sus efectos*, Editorial Tebar, 2003.
- [7] D.R. Askeland, P.P Phulé, “*Ciencia e Ingeniería de los materiales*”, Capítulo 21, Editorial Thomson, 2004.
- [8] Charles Kittel, “*Introducción a la física del estado sólido*”, Capítulo 5, Editorial Reverte, 1995.
- [9] José Luis Movilla, “*Termodinámica Química*”, Capítulo 3 “*Calor y Primer Principio: Ley de la Conservación de la Energía*”, Editorial Universitat Jaume I, 2005.

[10] Valera Negrete, J. P. Agustín, “*Apuntes de Física General*”, Capítulo 3.3.4 “*Principio de la conservación de la energía*”, Editorial UNAM, 2005.

[11] James Stewart, “*Cálculo: Trascendentes tempranas*”, Capítulo 5 “*Integrales*”, Editorial Cengage Learning Editores, 2008.

[12] Hans F. Weinberger, “*Ecuaciones Diferenciales en derivadas parciales, con métodos de variable compleja y transformaciones integrales*”, Capítulo 4-22 “*La ecuación de calor*”; Editorial Reverte, 1996.

[13] James Stewart, “*Cálculo: Trascendentes tempranas*”, Capítulo 3 “*Reglas de Derivación*”, Editorial Cengage Learning Editores, 2008.

[14] Hans F. Weinberger, “*Ecuaciones Diferenciales en derivadas parciales, con métodos de variable compleja y transformaciones integrales*”, Capítulo 4 “*Separación de variables y series de Fourier*”; Editorial Reverte, 1996.

[15] R.K. Nagle, E.B. Saff, A. D. Snider, “*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*”, Capítulo 10.2 “*Ecuaciones diferenciales parciales-método de separación de variables*”, Editorial Pearson Educación, 2005.

[16] Dennis Zill, Michael Cullen, “*Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*”, Capítulo 4.3 “*Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes*”, Editorial Cengage Learning Editores, 2009.

[17] James Stewart, Lothar Redlin, “*Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*”, Editorial Cengage Learning Editores, 2007