Generalización de la inducción matemática a estructuras inductivas

Generalization of mathematical induction to inductive structures

Verónica Cifuentes V[1]., Víctor Marín[2]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
vcifuentesv@udistrital.edu.co
vemarinc@ut.edu.co

***Resumen*— En esta nota se muestra cómo la inducción matemática definida sobre la mínima estructura inductiva (los números naturales) puede ser generalizada a cualquier tipo de estructura inductiva que satisface lectura única. Para este fin, se muestra un teorema el cual generaliza el teorema de definición por inducción a cualquier estructura inductiva que satisface lectura única. Se ilustra con algunos ejemplos.**

***Palabras clave*— Bloques, estructura inductiva, inducción, lenguaje de sentencias, operadores.**

***Abstract*— In this note we show how the mathematical induction defined on the minimum inductive structure (the natural numbers) may be generalized to any type of inductive structure that satisfies unique readability. For this, we show a theorem which generalizes the theorem of definition by induction to any inductive structure that satisfies unique readability. We illustrate with examples.**

***Key Word* — Blocks, induction, inductive structure, operators, sentencial logic**

I. INTRODUCCIÓN

Es bien conocida la importancia del método de demostración por inducción matemática para hacer pruebas de ciertas propiedades sobre el conjunto de números naturales. Surge de manera natural la pregunta: ¿el método de demostración por inducción puede ser generalizado a cualquier tipo de estructura inductiva? La respuesta es afirmativa, siempre que la estructura inductiva satisfaga lectura única. El objetivo de esta nota es mostrar dicha generalización.

A continuación presentamos una de las formas en que se presenta el principio de inducción.

Principio de Inducción 1.1. Sea $P(n)$ una propiedad que satisfacen los números naturales.

- Si $P(0)$ es verdadera.
- Si $P(n+1)$ es verdadera siempre que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales.

Implícitamente en este esquema aparecen dos elementos significativos, en primer lugar se parte de un número natural (0), y en segundo lugar para probar que la propiedad es verdadera para todos los números naturales se debe usar una cierta operación (el sucesor de n) sobre dicho número natural. En el caso de los números naturales en GOLDSTERN (véase, [4]) se enuncia y se demuestra el lema de definición por inducción. Dicho lema establece lo siguiente:

Lema 1.1. (Definición por inducción sobre $\mathbb{N}$).

Suponga que G_s es una función con dominio A y rango contenido en A, y sea a_0 un elemento de A. Entonces existe una única función f con dominio $\mathbb{N}$ que satisface

$$f(0) = a_0$$
$$f(k+1) = G_s(f(k)), \quad \forall k.$$

[1] Magíster en Ciencias Matemáticas

[2] Magíster en Ciencias Matemáticas, Profesor Asistente Universidad del Tolima

Fecha de Recepción: 25 de Agosto de 2011
Fecha de Aceptación: 09 de Diciembre de 2011

II. CONTENIDO

El lema anterior es fundamental para dar la generalización a cualquier estructura inductiva. A continuación se define el concepto de estructura inductiva y se ilustra con ejemplos.

A. Estructuras inductivas

Definición 2.1.1. Sean B un conjunto de objetos y K un conjunto de operadores de aridad n. Se define estructura inductiva, que se nota $C(B,K)$, de la siguiente forma:

i. Cada elemento de B es un elemento de $C(B,K)$.
ii. Si $F \in K$ es un operador de aridad n, y si $c_1, c_2, \dots, c_n \in C(B,K)$ entonces $F(c_1, c_2, \dots, c_n) \in C(B,K)$.
iii. Cada elemento de $C(B,K)$ se obtiene de i. o ii.

Ejemplo 2.1.1. Sean $B = \{0\}$ y $K = \{s\}$, donde

$$s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$x \mapsto x+1.$$

Entonces $C(B,K) = \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1.2. Sean $B = \{0\}$ y $K = \{f\}$, donde

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto x+2.$$

Entonces $C(B,K)$ es el conjunto de números pares.

Ejemplo 2.1.3. Este ejemplo muestra dos estructuras inductivas generadas por el mismo conjunto B y diferentes operadores, pero lo importante de éste, es que las dos estructuras inductivas resultan iguales.
Sean $B = \{00, 01, 10, 11\}$ y $K_1 = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ donde F_i son operadores sobre sucesiones de 0 y 1 definidos así:

$$F_1(x) = 0x0$$
$$F_2(x) = 0x1$$
$$F_3(x) = 1x0$$
$$F_4(x) = 1x1.$$

Sea $K_2 = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ donde G_i son operadores sobre sucesiones de 0 y 1 definidos así:

$$G_1(x) = 00x$$
$$G_2(x) = 01x$$
$$G_3(x) = 10x$$
$$G_4(x) = 11x.$$

A continuación demostraremos que $C(B, K_1) = C(B, K_2)$. En efecto, en primer lugar como el conjunto B es el mismo en ambos conjuntos lo que hace falta es demostrar que cada F_i está en $C(B, K_2)$ y que cada G_i está en $C(B, K_1)$.

$F_1(x) = 0x0 = G_1(y0) = 00\,\overbrace{y0} = 0\,\underbrace{0y}\,0$ donde $0y$ es x, y además $0y$ y $y0$ son sucesiones de 0 y 1.

$F_2(x) = 0x1 = G_2(y1) = 01\,\overbrace{y1} = 0\,\underbrace{1y}\,1$ donde $1y$ es x, y además $1y$ y $y1$ son sucesiones de 0 y 1.

$F_3(x) = 1x0 = G_3(y0) = 10\,\overbrace{y0} = 1\,\underbrace{0y}\,0$ donde $0y$ es x, y además $0y$ y $y0$ son sucesiones de 0 y 1.

$F_4(x) = 1x1 = G_4(y1) = 11\,\overbrace{y1} = 1\,\underbrace{1y}\,1$ donde $1y$ es x, y además $1y$ y $y1$ son sucesiones de 0 y 1.

Ahora,

$G_1(x) = 00x = F_1(0y) = 0\,\overbrace{y0}\,0 = 00\,\underbrace{0y}$ donde $0y$ es x, y además $0y$ y $y0$ son sucesiones de 0 y 1.

$G_2(x) = 01x = F_2(1y) = 0\,\overbrace{1y}\,1 = 01\,\underbrace{y1}$ donde $y1$ es x, y además $1y$ y $y1$ son sucesiones de 0 y 1.

$G_3(x) = 10x = F_3(0y) = 1\,\overbrace{0y}\,0 = 10\,\underbrace{y0}$ donde $y0$ es x, y además $0y$ y $y0$ son sucesiones de 0 y 1.

$G_4(x) = 11x = F_4(1y) = 1\,\overbrace{1y}\,1 = 11\,\underbrace{y1}$ donde $y1$ es x, y además $1y$ y $y1$ son sucesiones de 0 y 1.

Ejemplo 2.1.4. El lenguaje proposicional es un ejemplo de estructura inductiva, donde el conjunto de bloques es $B = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ (símbolos proposicionales) y el conjunto de operadores se define de la siguiente manera:

$$F_{\neg}: S^{+} \to S^{+}$$

$$\alpha \mapsto F_{\neg}(\alpha) := (\neg\alpha)$$

$$F_{\vee}: S^{+} \times S^{+} \to S^{+}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto F_{\vee}(\alpha, \beta) := (\alpha \vee \beta)$$

$$F_{\wedge}: S^{+} \times S^{+} \to S^{+}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto F_{\wedge}(\alpha, \beta) := (\alpha \wedge \beta)$$

$$F_{\to}: S^{+} \times S^{+} \to S^{+}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto F_{\to}(\alpha, \beta) := (\alpha \to \beta)$$

$$F_{\leftrightarrow}: S^{+} \times S^{+} \to S^{+}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto F_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta) := (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Donde S^{+} es el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de $S = B \cup F \cup \{(,)\}$, con $F = \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$. Siendo $K = \{F_{\neg}, F_{\vee}, F_{\wedge}, F_{\to}, F_{\leftrightarrow}\}$, se define $\mathcal{L} = C(B, K)$ y se denomina el lenguaje proposicional, sus elementos se llaman fórmulas proposicionales o fórmulas bien formadas.

Definición 2.1.2. Sea $C(B, K)$ una estructura inductiva. Se dice que $C(B, K)$ satisface lectura única si para cada $b \in C(B, K)$ se tiene exactamente una de las siguientes condiciones:

i. $b \in B$, o

ii. Existen $a_1, \dots, a_n \in C(B, K)$ únicos y un único operador $F \in K$ tal que $b = F(a_1, \dots, a_n)$, y ningún elemento de B es de la forma $F(a_1, \dots, a_n)$.

Definición 2.1.3. Sea $C = C(B, K)$ una estructura inductiva, y sea P una propiedad que satisfacen o no los elementos de C. Sea F un operador de aridad n de K.

Se dice que F preserva P:

Si $a_1, \dots, a_n$ satisfacen la propiedad P, entonces $F(a_1, \dots, a_n)$ satisface la propiedad P.

Principio de Inducción Lógico 2.1.1 Sea $C(B, K)$ una estructura inductiva con B el conjunto de objetos y K el conjunto de operadores tales que:

i. Cada elemento de B satisface la propiedad P, y

ii. Cada operador preserva la propiedad P.

Entonces,

Cada elemento de $C(B, K)$ satisface la propiedad P.

Nota 2.1.1. En el Principio de Inducción Lógico 2.1., la parte ii es relevante para las pruebas por inducción lógicas. Para demostrar que cada operador preserva la propiedad se supone que los elementos sobre los que actúa el operador satisfacen la propiedad, dicha suposición se conoce como hipótesis de inducción.

B. Definiciones Inductivas

En esta sección presentamos tres teoremas, el primero es una generalización del Lema 1.1., los dos últimos establecen definiciones inductivas sobre cualquier estructura inductiva que satisface lectura única. Además, ilustramos dichos teoremas con ejemplos.

En CAICEDO (véase, [6]) se presentan los teoremas de definición por inducción, pero allí usan funciones recursivas. Nuestra presentación sigue las ideas presentadas en MUÑOZ, GOLDSTERN (véase, [3,4]).

Teorema 2.2.1. (Definición de inducción sobre $\mathbb{N}$ generalizada). Sea G una función binaria con dominio $\mathbb{N} \times A$ y rango un subconjunto de A y sea $a_0 \in A$. Entonces existe una única función f con dominio $\mathbb{N}$ que satisface:

$$f(0) = a_0$$

$$f(k+1) = G(k, f(k)), \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. Sea C la colección de todos los subconjuntos R de $\mathbb{N} \times A$ tales que:

i. $(0, a_0) \in R$
ii. Si $(n, x) \in R \to (n^+, G(n, x)) \in R$.

$C \neq \emptyset$ ya que $\mathbb{N} \times A \in C$. Sea $f = \bigcap_{R \in C} R$ entonces

- $f \in C$: $(0, a_0) \in f$ ya que $(0, a_0) \in R, \forall R \in C$. Y si $(n, x) \in f$, entonces $(n, x) \in R, \forall R \in C$, por tanto, $(n^+, G(n, x)) \in R, \forall R \in C$, es decir, $(n^+, G(n, x)) \in f$.

- f es la mínima relación que satisface i. y ii. Supongamos lo contrario, es decir existe g que satisface i. y ii. y tal que $g \subset f$. Como $g \in C$, entonces $g \in f$, y por tanto $f \subset g$, lo que contradice la hipótesis.

- El dominio de f es $\mathbb{N}$ como puede verse por inducción: $0 \in dom\,(f)$, ya que $(0, a_0) \in R, \forall R \in C$. Suponemos que $n \in dom\,(f)$, por tanto existe $y \in A$ tal que $(n, y) \in f$, luego $(n^+, G(n, y)) \in f$, es decir $n^+ \in dom\,(f)$.

- f es función: sea $S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : (\exists x \in A) \wedge (n, x) \in f \ \wedge x \text{ única}\}$. Basta mostrar que $S = \mathbb{N}$. Por inducción:

  - $0 \in S$, ya que $(0, a_0) \in f$, y a_0 es el único elemento en A tal que $(0, a_0) \in f$, pues si se supone lo contrario, es decir, si existiera $y \neq a_0 \in A$, tal que $(0, y) \in f$, nos lleva a contradecir la minimalidad de f, como se muestra a continuación: sea $\bar{f} = f - \{(0, y)\}$. $\bar{f} \in C$ ya que $(0, a_0) \in \bar{f}$, pues $(0, a_0) \in f$ y es distinta de $(0, y)$, debido a que $y \neq a_0$, y si $(n, x) \in \bar{f}$ entonces $(0, a_0) \in f$ y por tanto, $(n^+, G(n, x)) \in f$, siendo esta última diferente a $(0, y)$, ya que cero no es sucesor de ningún número natural. Así, $\bar{f} \subset f$.
  - Supongamos que $n \in S$, es decir existe una única $x \in A$ tal que $(n, x) \in f$. Ahora, como $(n, x) \in f$ entonces $(n^+, G(n, x)) \in f$ por ii., y de aquí $(n^+, G(n, x)) \in S$. Falta ver que $G(n, x)$ es única. En efecto, si existiera $y \neq G(n, x)$ tal que $(n^+, y) \in f$ se tendría la siguiente contradicción: sea $f' := f - \{(n^+, y)\}$; $f' \in C$ ya que $(0, a_0) \in f$ y $(0, a_0) \neq (n^+, y)$ pues cero no es sucesor de ningún número natural, y si $(p, q) \in f'$ entonces $(p, q) \in f$ y por tanto $(p^+, G(p, q)) \in f$; además $(p^+, G(p, q)) \neq (n^+, y)$, pues si $p \neq n$ entonces $p^+ \neq n^+$ y por tanto $(p^+, G(p, q)) \neq (n^+, y)$; y si $p = n$, entonces $(p, q) = (n, x)$ ya que por hipótesis x es única, luego $(p^+, G(p, q)) \neq (n^+, G(n, x)) \in f$ y $(n^+, G(n, x)) \neq (n^+, y)$, es decir $(p^+, G(p, q)) \neq (n^+, y)$. Así, $f' \subset f$, lo cual contradice la minimalidad de f.

Teorema 2.2.2. (Definiciones inductivas).
Asuma que $C = C(B, K)$ satisface lectura única. Sea A un conjunto, y sea f_0 una función con dominio B y rango incluido en A. Suponga que para cada F en K se tiene una función G_F que satisface:

i. Si F es una función de aridad n, entonces $dom\,(G_F) = A^n$
ii. $rango\,(G_F) \subseteq A$.

Entonces, existe una única función f tal que

i. $f(b) = f_0(b)$ para todo bloque $b \in B$.

ii. Para todo n, todo operador de aridad n, $F \in K$, todos $a_1, \ldots, a_n$ en C:

$$f(F(a_1, \ldots, a_n)) = G_F(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Demostración. Sea L la colección de todos los subconjuntos R de $C \times A$, con $C = C(B, K)$ tales que:

i. $(b, f_0(b)) \in R$

ii. $((a_1, \ldots, a_n), x) \in R \rightarrow (F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in R$.

$L \neq \emptyset$ ya que $C \times A \in L$. Sea $f = \bigcap_{R \in L} R$, entonces

- $f \in L$: $(b, f_0(b)) \in f$ ya que $(b, f_0(b)) \in R, \forall R \in L$ y si $((a_1, \ldots, a_n), x) \in f, ((a_1, \ldots, a_n), x) \in R, \forall R \in L$, por lo tanto $(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in R, \forall R \in L$, es decir

$$(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in f$$

- f es la mínima relación que satisface i. y ii. Supongamos lo contrario, es decir existe g que satisface i. y ii. y tal que $g \subset f$. Como $g \in L$, entonces $g \in f$ y por tanto $f \subset g$, lo que contradice la hipótesis.

- El dominio de f es $C = C(B, K)$ como puede verse por inducción: $b \in dom(f)$, ya que $(b, f_0(b)) \in R, \forall R \in L$. Ahora, supongamos que $(a_1, \ldots, a_n) \in dom(f)$, por tanto existe $y \in A$ tal que $((a_1, \ldots, a_n), y) \in f$, luego $(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(y)) \in f$, es decir, $F(a_1, \ldots, a_n) \in dom(f)$.

- f es función: sea $S \coloneqq \{(a_1, \ldots, a_n) \in C(B, K) : (\exists x \in A)((a_1, \ldots, a_n), x) \in f \wedge x \text{ es única}\}$.

Basta probar que $S = C(B, K)$. Por inducción:

- $b \in S$, ya que $(b, f_0(b)) \in f$ y $f_0(b)$ es el único elemento en A tal que $(b, f_0(b)) \in f$, pues si se supone lo contrario, es decir, si existiera $y \neq f_0(b) \in A$, tal que $(b, y) \in f$ contradice la minimalidad de f, como se muestra a continuación: sea $\bar{f} = f - \{(b, y)\}$. $\bar{f} \in L$ ya que $(b, f_0(b)) \in f$ y es diferente a (b, y) debido a que $y \neq f_0(b)$, y si $((a_1, \ldots, a_n), x) \in \bar{f}$ entonces $((a_1, \ldots, a_n), x) \in f$ y por tanto $(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in f$, y siendo esta última diferente a (b, y), ya que $b \in B$ y por lectura única no puede ser de la forma $F(a'_1, \ldots, a'_n)$. Así, $\bar{f} \subset f$. Lo cual contradice la minimalidad de f.

- Supongamos que $(a_1, \ldots, a_n) \in S$, es decir existe una única $x \in A$ tal que $((a_1, \ldots, a_n), x) \in f$. Además, ya que $f \in L$ se tiene que $(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in f$, y de aquí $(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in S$. Falta ver que $G_S(x)$ es única. En efecto, si existiera $y \neq G_S(x)$ tal que $(F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x)) \in f$ se tendría la siguiente contradicción: sea $f' := f - \{((a_1, \ldots, a_n), y)\}$; $f' \in L$ ya que $(b, f_0(b)) \in f$ y $(b, f_0(b)) \neq (F(a_1, \ldots, a_n), y)$ pues $b \neq F(a_1, \ldots, a_n)$ porque $C(B, K)$ satisface lectura única, y si $((p_1, \ldots, p_n), q) \in f'$ entonces $((p_1, \ldots, p_n), q) \in f$ y por tanto $(F(p_1, \ldots, p_n), G_S(q)) \in f$ por ii.; además $(F(p_1, \ldots, p_n), G_S(q)) \neq (F(a_1, \ldots, a_n), y)$, pues si $(p_1, \ldots, p_n) \neq (a_1, \ldots, a_n)$ entonces $F(p_1, \ldots, p_n) \neq F(a_1, \ldots, a_n)$ por lectura única y por tanto $(F(p_1, \ldots, p_n), G_S(q)) \neq (F(a_1, \ldots, a_n), y)$; y si $(p_1, \ldots, p_n) = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces $((p_1, \ldots, p_n), q) = ((a_1, \ldots, a_n), x)$ ya que por hipótesis x es única, luego $(F(p_1, \ldots, p_n), G_S(q)) = (F(a_1, \ldots, a_n), G_S(x))$ y pertenence a f y

$(F(p_1, \ldots, p_n), G_s(x)) \neq (F(a_1, \ldots, a_n), y)$, es decir, $(F(p_1, \ldots, p_n), G_s(q)) \neq (F(a_1, \ldots, a_n), y)$. Así, $f' \subset f$, lo cual contradice la minimalidad de f.

Teorema 2.2.3. (Definición inductiva generalizada). Suponga que $C = C(B, K)$ satisface lectura única. Sea A un conjunto, y sea f_0 una función con dominio B y rango contenido en A. Suponga que para cada F en K se tiene una función G_F que satisface:

i. Si F es una función de aridad n, entonces $dom\,(G_F) = A^{2n}$.
ii. $rango\,(G_F) \subseteq A$.

Entonces, existe una única función f que satisface:

i. $f(b) = f_0(b)$ para todo bloque $b \in B$.
ii. Para todo n, todo operador de aridad n, $F \in K$, $a_1, \ldots, a_n$ en C:

$$f(F(a_1, \ldots, a_n)) = G_F(a_1, \ldots, a_n, f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Ejemplo 2.2.1. Consideremos $S = \{a, b, c\}$ el conjunto de tres símbolos. Se define una estructura inductiva con los tres bloques a, b, c y los tres operadores $K = \{F_a, F_b, F_c\}$ definidos así:

$$F_z(x) := xz, \qquad z \in \{a, b, c\}.$$

$C(S, K) = S^+$, el conjunto de todas las sucesiones finitas de S. Mostremos que S^+ satisface lectura única. En efecto, si $q \in C(S, K)$ entonces se tienen las siguientes posibilidades:

I. $q \in S$, es decir $q = a$ o $q = b$ o $q = c$, entonces $q \neq F_z(x)$, donde $z \in \{a, b, c\}$ y $x \in C(S, K)$, pues de lo contrario

$$a = F_z(x) \quad \vee \quad b = F_z(x) \quad \vee \quad c = F_z(x)$$

$$a = xz \quad \vee \quad b = xz \quad \vee \quad c = xz$$

lo cual es imposible.

II. Si $q = F_z(x)$ donde $z \in \{a, b, c\}$ y $x \in C(S, K)$, es decir, $q = F_a(x)$ o $q = F_b(x)$ o $q = F_c(x)$.

- Veamos que F_z es única. Supongamos lo contrario, es decir, $q = F_z(x) = F_w(x)$ donde $w \in \{a, b, c\}$, es decir $xz = xw$ de donde $z = w$.
- Veamos que $x \in C(S, K)$ es única. Supongamos lo contrario, es decir, $q = F_z(x) = F_z(y)$ de donde $xz = yz$. Por tanto $x = y$.

Ahora con la estructura inductiva S^+, que satisface lectura única, definamos por inducción (véase, Teorema 2.2.2) la función concatenación sobre S^+.

Sea $A = S^+$ y $f_0 : S \to S^+$ definida por $f_0(x) := x$. Para cada $F_z \in K$, sea $G_{F_z}(x) := xz$. Entonces, existe una única función f tal que

- $f(b) = f_0(b) \qquad \forall b \in S$
- Para todo operador $F_z \in K$ y $\forall x \in C(S, K)$

$$f(F_z(x)) = G_{F_z}(f(x)) = f(x)z.$$

Ejemplo 2.2.2. En primer lugar definamos por inducción el número de bloques en una fórmula proposicional. Sean A_n un bloque, y α y β elementos de $C(B, K)$. Entonces

$$f(A_n) = 1$$

$$f(\neg\alpha) = f(\alpha)$$

$$f(\alpha @ \beta) = f(\alpha) + f(\beta).$$

Donde

$$G_{F_\neg}(n) = n$$

$$G_{F_@}(n, m) = n + m,$$

Con $@ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$.

En segundo lugar definamos el máximo n tal que A_n es un bloque en la fórmula α.

$$f(A_n) = n$$

$$f(\neg\alpha) = f(\alpha)$$

$$f(\alpha @ \beta) = max\{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

Donde

$$G_{F_\neg}(n) = n$$

$$G_{F_@}(n, m) = max\{n, m\}$$

con $@ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$.

III. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir del teorema de definición por inducción generalizado (véase, [4]) se enuncian y se demuestran dos teoremas que hacen referencia a inducción sobre estructuras inductivas. Estos generalizan los dos teoremas de definición por inducción que se presentan en MUÑOZ (véase, [3]). Además, la introducción de estructuras inductivas (véase, [4]) hace más fácil (desde un punto de vista didáctico) las pruebas por inducción en fórmulas en un curso de lógica clásica. Los ejemplos permiten entender aún más las definiciones por inducción (o mejor conocidas definiciones por recurrencia, véase [1, 2, 6]).

REFERENCIAS

[1] H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, New York: Harcourt Academic Press, 2001.

[2] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 4th ed., New York: Chapman and Hall, 2009.

[3] J. M. Muñoz, *Introducción a la Teoría de conjuntos*, 4ª ed., Bogotá: Universidad Nacional, 2004.

[4] M. Goldstern and H. Judah, *The Incompleteness Phenomenon: A New Course in Mathematical Logic,* Wellesey: A K Peters, 1998.

[5] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, New York: Springer-Verlag, 1974.

[6] X. Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad,* Bogotá: Universidad de los Andes, 1989.