Breve apología al transporte paralelo

Brief apology to the parallel transport.

Edgar Alirio Valencia, Yuri Alexander Poveda, Carlos Arturo Escudero
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
evlencia@utp.edu.co
carlos10@utp.edu.co
yapoveda@utp.edu.co

Resumen— En este artículo se hace un reconocimiento a una de las herramientas poderosas de que dispone la geometría diferencial de variedades, que es el transporte paralelo, pues sin ella sería muy difícil entender la derivada de campos vectoriales, la teoría de geodésica, la curvatura, conceptos que están bien definidos debido al transporte paralelo.

Palabras clave- **Transporte, paralelo, conexión, métrica**

Abstract— **A In this article a recognition is done to one of the powerful tools of which he arranges the differential geometry of varieties, which is the parallel transport, since without her it would be very difficult to understand the derivative of vectorial fields, the theory of geodesic, the curvature, concepts that are defined well due to the parallel transport.**

Key Word — **Transport, parallel, connection, metrics.**

I. INTRODUCCIÓN

Algunos matemáticos opinan que para resolver problemas en las matemáticas se debe trabajar de una forma cómoda y elegante usando herramientas poderosas y adecuadas que posee dicha ciencia. A veces esas herramientas no se conocen en los primeros cursos de la carrera de matemáticas por la sencilla razón que se debe tener una gran bagaje en matemáticas para poderlas entender. Por citar una de esas herramientas injustamente olvidada, la inversión, con la cual se pueden resolver interesantes problemas de la geometría, mirar por ejemplo [1]; además las inversiones están presente en el estudio de la variable compleja, de las cónicas y la geometría hiperbólica.
En este artículo se presenta otra herramienta fundamenta de las matemáticas, surge en la geometría diferencial de variedades como lo es el transporte paralelo, que aunque no es tan accesible en los primeros cursos de matemáticas como lo es la inversión, desempeña un papel primordial para entender conceptos básicos del análisis en espacios abstractos, como son la derivada de campos vectoriales, la teoría de geodésica, y la curvatura de una curva vistas en espacios como son las variedades diferenciables.
En los textos de cálculo elemental se suele definir la curvatura de una curva plana, $\alpha: I \to R^2$ parametrizada por la longitud de arco s, como la tasa de variación del ángulo, que forma el vector tangente unitario con una dirección fija, con respecto a la variación de su longitud, es decir

$$k(s) = \frac{\varphi(s)}{ds},$$

donde $k(s)$ denota la curvatura de la curva α, y la dirección fija es el eje x, mirar por ejemplo [11]. Otra manera semejante de definir la curvatura de una curva plana es calcular la magnitud de la tasa de variación del campo vectorial tangente unitario a la curva con respecto a la longitud de arco, esta es la manera más usada para determinar la curvatura de una curva plana.
Un campo vectorial en una superficie S, es una aplicación definida de la siguiente manera $X: S \to TS$, donde TS representa el conjunto de los planos tangente a la superficie S, tal que, $X(p) \in T_pS$, donde $p \in S$ y T_pS es el plano tangente a S en p, mirar por ejemplo [5], [6] y [9]. Dada la similitud local que existe entre un plano y una superficie, una definición similar de la curvatura de una curva en una superficie como la magnitud de la tasa de variación del campo vectorial del tangente unitario $\alpha'(s)$ a la curva con respecto a la longitud de arco; pero se tiene una gran dificultad ya que la derivada de los campos vectoriales definidos en una superficies y en particular en una curva no necesariamente viven en el plano tangente $T_{\alpha(s)}S$; esta dificultad se puede obviar usando el concepto de transporte paralelo, mirar por ejemplo [8].
De la misma manera a como sucede con el concepto de curvatura, se necesita hacer uso del trasporte paralelo, para que

Fecha de Recepción: 26 de Enero de 2012
Fecha de Aceptación: 23 de Abril de 2012

la derivada de campos vectoriales definidos en una variedad diferenciable con respecto a un campo vectorial tangente a lo largode una curva sobre la variedad sea análoga al concepto de la derivada direccional de un campo vectoriales en R^n con respecto al campo vectorial tangente a una curva. En este artículo exponemos dicho caso.

El concepto del transporte paralelo fue introducido por el matemático italiano Levi-Civita en 1917, se dice que Civita ayudo personalmente a Albert Einstein en el cálculo tensorial y no cabe duda que Civita hace una gran contribución a la teoría de la relatividad, ya que en un espacio-tiempo curvo no existe una manera directa de relacionar magnitudes vectoriales o tensoriales medidas en diferentes puntos del espacio-tiempo. El transporte paralelo resuelve esta dificultad, pues permite relacionar magnitudes vectoriales o tensoriales en diferentes puntos del universo.

II. METRICA Y CONEXIÓN RIEMANNIANA

Una métrica Riemanniana definida en un punto p de una variedad diferenciable M es una función g sobre el espacio tangente de T_pM, definida de la siguiente manera (quitar: definida de la siguiente manera por que satisface las siguientes propiedades)

i) $g(X_p, X_p) \geq 0$, para todo $X_p \in T_pM$, es cero cuando $X_p = 0$, es decir g está definida positivamente.

ii) $g(X_p, Y_p) = g(Y_p, X_p,)$ para todo $X_p, Y_p \in T_pM$; es decir g es simétrica.

iii) g es bilineal.

Con lo anterior podemos afirmar que a cada punto de M le corresponde un producto interno. Una variedad diferenciable M con una métrica Riemanniana g se conoce como una variedad Riemannniana.

Ahora queremos (cambiar: queremos por nos proponemos) derivar campos vectoriales y relacionarlos después con nuestra métrica Riemanniana. La derivada covariante de campos vectoriales definidos en una curva de una variedad Riemanniana es una herramienta importante para el conocimiento sobre el concepto (quitar sobre el concepto) de (agregar: las) curvas geodésicas y de curvatura, ya que se hace indispensable derivar campos vectoriales con respecto a cualquier dirección, no necesariamente en la dirección de la tangente por a una curva. Con esto se consigue tener un concepto de curvatura en una variedad.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre M y £(M) el anillo de funciones de valor real diferenciables definidas sobre M.

Definición 2.1.Una conexión afín sobre una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) x\, \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

La cual es denotada por $\nabla_X Y$ donde X y Y pertenecen a $\mathfrak{X}(M)$ y satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$

Donde X, Y, Z pertenecen a $\mathfrak{X}(M)$ y f, g pertenecen a £(M).

Definición 2.2. Sea X(t) un campo vectorial diferenciable en una variedad M restringido a una curva $\alpha : I \to$M. Se define la derivada covariante de X como:

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} X.$$

Definición 2.3. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial X a lo largo de una curva $\alpha : I \to$M es llamado paralelo cuando $\frac{DX}{dt} = 0, \forall\, t \in I.$

Aplicando el Teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene el siguiente resultado, mirar por ejemplo [9].

Teorema 2.1. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Sean $\alpha: I \to$M una curva diferenciable en M y X_0 es un vector tangente sobre M en el punto $\alpha(t_0)$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo X a lo largo de α, tal que $X(t_0) = X_0$.

Demostración**.** Sea $x: U C R^n \to M$, una parametrización de la variedad M, donde U es un subconjunto abierto de R^n. Supongamos que $\alpha(I)$ esta contenida en una vecindad coordenada $x(U)$, la expresión de α en coordenadas es

$$x^{-1}(\alpha(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Sea

$$X_0 = \sum_j x_0^j \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha(t_0)).$$

Supongamos que existe un campo vectorial X en $x(U)$ paralelo a lo largo de α con $X(t_0) = X_0$. Entonces

$$X = \sum_j y^j \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha(t)),$$

Satisface la siguiente ecuación diferenciable

$$0 = \frac{DX}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} X = \sum_j \frac{dy^j}{dt} X_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} y^j \nabla_{X_i} X_j,$$

donde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha(t))$.

Haciendo

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

Y reemplazando j por k tenemos

$$\frac{DX}{dt} = \sum_k \left(\frac{dy^k}{dt} + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} y^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0.$$

Por tanto, tenemos un sistema de n ecuaciones diferenciables en términos de $y^k(t)$,

$$\frac{dy^k}{dt} + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} y^j \Gamma_{ij}^k = 0,$$

para $k = 1, \ldots n$, satisface la condición inicial $y^k(t_0)=x_0^k$.

Por el Teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinaria, el sistema anterior tiene una única solución que satisface la condición inicial. Con esto queda probado el resultado.

El campo vectorial $X(t)$ se conoce como el transporte paralelo de X_0 a lo largo de la curva α.

Definición 2.4. Sea M una variedad Riemanniana con una métrica g y una conexión ∇. Diremos que g es compatible ∇, cuando para cualquier par de campos vectoriales paralelos X, Y a lo largo de una curva sobre M tenemos que

$$g(X, Y) = constante.$$

No es difícil demostrar que la definición anterior se convierte en Teorema cuando las variedades se encuentran inmersas en el espacio euclidiano cuya codimensión sea 1, y la métrica sea la euclidiana; por ejemplo las superficies.

Con esta definición y el Teorema 3.1 es inmediato demostrar la regla de la derivada del producto interior de campo vectoriales.

Teorema2.2 Sean M una variedad Riemanniana con una conexión ∇, X y Y dos campos vectoriales diferenciables sobre una curva $\alpha: I \to M$. Entonces

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right).$$

Demostración**.** Escojamos una base ortonormal $\{e_i(t_0)\}$, $i = 1, \dots, n$, del espacio tangente $T_{\alpha(t_0)}M$, y efectuemos el transporte paralelo de cada vector $e_i(t_0)$ a lo largo de la curva α y lo denotaremos por $e_i(t)$. Por la definición 2.4 tenemos que $\{e_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, es una base ortonormal del espacio tangente $T_{\alpha(t)}M$. Entonces podemos expresar los campos vectoriales X y Y en términos de la base $\{e_i(t)\}$, es decir

$$X(t) = \sum_i x_i e_i, \; Y(t) = \sum_i y_i e_i.$$

De la misma manera

$$\frac{DX}{dt} = \sum_i \frac{x_i}{dt} e_i, \; \frac{DY}{dt} = \sum_i \frac{y_i}{dt} e_i.$$

Usando el hecho que la base son campos vectoriales paralelos tenemos:

$$g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right) = \sum_i \left(\frac{x_i}{dt} y_i + \frac{y_i}{dt} x_i\right),$$

luego

$$g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i y_i\right) = \frac{d}{dt} g(X, Y).$$

Ahora veremos que el hecho de ser compatible contiene una propiedad importante del transporte paralelo.

Teorema 2.3. Sean p y q dos puntos de una variedad Riemanniana M y $\alpha: I \to M$ una curva parametrizada con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$. Sea $P_\alpha: T_pM \to T_qM$ la aplicación que asigna a cada $X \in T_pM$ su transporte paralelo a lo largo de la curva α en el punto q. Entonces la aplicación P_α es una isometría.

Demostración**.** Por el Teorema 2.1 o siendo más precisos por el Teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que P_α es biyectiva. Como estamos considerando campos vectoriales diferenciables sobre M entonces P_α y P_α^{-1} son diferenciales.

Para finalizar la demostración tenemos que por la definición 2.4 se tiene que $g(P_\alpha(X), P_\alpha(Y))$ es constante a lo largo de α, en particular es la misma constante para $g(X, Y)$, por tanto $g(P_\alpha(X), P_\alpha(Y)) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \in T_pM$; así finalizamos la demostración.

Ahora sigue un resultado interesante desde el punto de vista de la analogía que existe de la derivada de campos vectoriales en R^n y la conexión Riemanniana ∇ de campos vectoriales. Además el Teorema siguiente muestra que podemos obtener la conexión desde el concepto de paralelismo.

Antes de enunciar el Teorema vamos a denotar el campo vectorial a lo largo de una curva definida sobre M como $X(t)$, donde t es parámetro de la curva.

Teorema2.4. Sean X y Y dos campos vectoriales diferenciables sobre una variedad Riemanniana M. Sea $p \in M$ y $\alpha: I \to M$ una curva integral de X en p, es decir, $\alpha(t_0) = p$ y $X(t) = \alpha'(t)$, pruebe que la conexión Riemanniana de M es,

$$\nabla_{\alpha'(t)} Y = \nabla_X Y = \frac{d}{dt} P_\alpha^{-1}(Y(t))$$

la expresión del lado derecho cuando $t = t_0$.

Demostración**.** Consideremos una base ortonormal $\{e_i(t_0)\}$, $i = 1, \dots, n$, del espacio tangente $T_{\alpha(t_0)}M$ y efectuemos el transporte paralelo de cada vector $e_i(t_0)$ a lo largo de la curva α y lo denotaremos por $e_i(t)$. Por la definición 2.4 tenemos que $\{e_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, es una base ortonormal del espacio tangente $T_{\alpha(t)}M$. Por consiguiente podemos expresar el campo vectorial Y(t) en términos de la base $\{e_i(t)\}$, es decir

$$Y(t) = \sum_i y_i \, e_i,$$

luego

$$\nabla_{\alpha'(t)}Y(p) = \nabla_X Y(p) = \left(\sum_i y_i \, \nabla_X e_i + \sum_i X(y_i) \, e_i\right)(p)$$

como $e_i(t)$ son campos vectoriales paralelos y $X(y_i)$ es la derivada de la componente y_i en la dirección X en la base $\{e_i(t)\}$ entonces

$$\nabla_X Y(p) = \left(\sum_i y_i' \, e_i\right)(p) = \sum_i y_i' \, (t_0) e_i(t_0).$$

Por otro lado, como $P_\alpha^{-1}(Y(t)) \in T_{\alpha(t_0)}M$ y por la definición 2.4 entonces

$$\frac{d}{dt} P_\alpha^{-1}(Y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i \, (t) \, e_i(t_0)\right).$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt} P_\alpha^{-1}(Y(t)) = \left(\sum_i y_i' \, (t) e_i(t_0)\right).$$

Por último haciendo $t = t_0$ se obtiene el resultado esperado.

III. CONCLUSIONES

Nuestra labor como matemáticos es muy parecida a la labor que ejerce un carpintero, por citar un oficio, ya que el carpintero antes de realizar un trabajo, el tiene que analizar y planificar lo que debe hacer y pensar en la mejor manera de ejecutar dicho trabajo, pero en la fase de la elaboración necesitara herramientas adecuadas que le ayuden en la realización trabajo, como por ejemplo un gran cepillo eléctrico, etc. En matemáticas sucede algo similar, en las maestrías de matemáticas de las universidades Colombianas se nos enseñan diversas herramientas, como por ejemplo, el transporte paralelo, un concepto inherente de la geometría diferencial, el cual nos ayuda a resolver ese paso oscuro de extender algunos conceptos de R^n cuando se miran en las variedades diferenciables. Pensamos que sin esta herramienta tan sofisticada, el transporte paralelo por ejemplo, no se podría hacer una analogía de los conceptos de derivada, geodésica y curvatura en R^n a variedades diferenciables.

REFERENCIAS

[1] A. Reventos, "Geometría Inversiva,"Publicaciones departamento de matemáticas UAB, Barcelona,2000.

[2] A.Ramsay.R.Richtmyer,"Introduction to Hyperbolic".Springer Verlag,New York,1995.

[3] A.S.Smogorzhevski,"Acerca de la geometría de Lobachevski".Mir,Moscu,1970.

[4] D.Struik., "Lecture on classical Differential Geometry," Courier Dover Publications.1988.

[5] J.Lee, "Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature".Springer Verlag,New York,1997.

[6] J.Lee,"Introduction to Smoot Manifolds".Springer Verlag,New York,2002.

[7] J.G.Ratcliffe,"Foundations of Hyperbolic Manifolds,".Springer Verlag,New York,1994.

[8] M.P Do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surface," Prentice-Hall,Inc, New Yersey1976.

[9] M.P Do Carmo, “Riemannian Geometry”, Mathematics, Theory y Aplplications,Birkauser, 1992.

[10] R.Benedetti.C.Petronio.”Lecture on Hyperbolic Geometry”.Springer Verlag,New York,1992.

[11] T.Apostol, “Calculus”, volumen II Reverte, Barcelona,1965.