Aplicación del teorema de Leray – Schauder a un problema de borde

Application of Leray–Schauder's theorem a boundary problem

Pedro Pablo Cárdenas Álzate, Luz María Rojas Duque[1], José Gerardo Cardona Toro
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira – Colombia
ppablo@utp.edu.co
lmrojas@funandi.edu.co
lmrojasd@utp.edu.co
gerardo7@utp.edu.co

Resumen **- En el presente artículo[1] se muestra una aplicación de existencia de solución para un problema de contorno usando el teorema de Leray-Schauder. Bajo condiciones apropiadas, se prueba la existencia y unicidad de un problema no lineal de segundo orden.**

***Palabras clave* - Contorno, punto fijo, Leray-Schauder.**

***Abstract*- This article it show an application of the existence of solution for a boundary problem using the Leray-Schauder theorem. Under proper conditions, we prove the existence and uniqueness for a non-linear second order.**

***Key Word*- Boundary, fixed point, Leray - Schauder.**

I. INTRODUCCIÓN

Se considera el siguiente problema periódico

$$\begin{cases} u'' = f(t,u) \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

donde por simplicidad se supone que *f* es continua y de clase C^1 respecto a la variable *u*, y *f* acotada y continua.

Para ello se usarán resultados del teorema de punto fijo de Schauder en la búsqueda de existencia de solución. Además se tratará el caso semilineal.

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Fundación Universitaria del Área Andina, Pereira – Colombia, Departamento de Matemáticas – Universidad Tecnológica de Pereira

Fecha de Recepción: 26 de Enero de 2012
Fecha de Aceptación: 18 de Abril de 2012

II. TEOREMA DE LERAY – SCHAUDER

Teorema 2.1 (Leray-Schauder**).** Sea *E* un espacio de Banach y sea $T: E \times [0,1] \rightarrow E$ una aplicación compacta tal que $T(x,0) = 0,\ \forall\, x \in E$. Si $\exists\, M \in \mathbb{R}: \forall\, x \in E$ que verifique $T(x,\alpha) = x$ para algún $\alpha \in [0,1]$ se tiene que $\|x\| < M$, entonces $\exists\, x \in E$ tal que $T(x,1) = x$.

Para ver los detalles de la demostración de este teorema, se invita al lector ver [1].

Es importante recordar que el teorema de punto fijo de Schauder es la generalización del teorema de punto fijo de Brouwer en dimensión infinita; por ello se recuerda dicho teorema importante de la topología. Recordemos entonces dicho teorema:

Teorema 2.1. (Brouwer). Considérese un espacio *H Hilbert* de dimensión finita, $C \subset H$ un conjunto compacto, convexo no vacío. Si $f: C \rightarrow C$ es una función continua, entonces la función tiene un punto fijo. [1]

Teorema 2.2. (Schauder). Sea *C* un subconjunto convexo y compacto en *E*, espacio de Banach. Si $T: C \rightarrow C$ es continuo, entonces *T* tiene un punto fijo.
[1].

Ahora, se hace mención de un corolario del teorema de Leray-Schauder que será de gran importancia para lo que se pretende hacer.

Corolario 2.1. Sean E un espacio de Banach y $K: E \to E$ una aplicación compacta. Si $\exists\, M \in \mathbb{R}: \forall\, x \in E$ que cumpla $x = \sigma K x$ para algún $\sigma \in [0,1]$ se tiene que $\|x\| < M$, entonces K tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Tomando $T: E \times [0,1]$ como $T(x,t) = tKx$, T cumple las hipótesis del teorema, luego

$$\exists\, x \in E: x = T(x,1) = Kx$$

■

Para otra demostración sin usar el teorema anterior, se invita al lector ver [1].

III. MÉTODO DE SUPER Y SUB-SOLUCIÓN

Una *Sub-solución* es cualquier función α que cumpla

$$\begin{cases} \alpha'' \geq f(t,\alpha) \\ \alpha(0) \leq A, \quad \alpha(T) \leq B \end{cases}$$

Una *Super-solución* es cualquier función β que cumpla

$$\begin{cases} \beta'' \leq f(t,\beta) \\ \beta(0) \geq A, \quad \beta(T) \geq B \end{cases}$$

Sean α y β super y sub-solución del problema (1.1) de manera que $\alpha \leq \beta$. Defínase además el conjunto

$$\{u \in C([0,1]): \alpha \leq u \leq \beta\}$$

Para la existencia de solución del problema en cuestión se usará la función de truncamiento

$$P: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida como:

$$P(t,u) = \begin{cases} \alpha(t), & si \;\; \alpha(t) > u \\ u, & si \; \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \\ \beta(t), & si \;\; \beta(t) < u \end{cases}$$

IV. RESULTADOS DE EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

Se quiere probar la existencia de al menos una solución de

$$\begin{cases} u'' = f(t,u) \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1 \end{cases}$$

donde por simplicidad se supone que *f* es continua y de clase C^1 respecto a la variable *u*.

Teorema 3.1. Supóngase que existen α y β sub-solución y super-solución respectivamente tales que $\alpha \leq \beta$. Entonces existe al menos una solución u de (1.1) con la condición de que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Demostración. Sea el conjunto (Banach)

$$C[0,T] = \{u: [0,T] \to \mathbb{R}, \quad continua\}$$

con

$$\|u\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)|$$

Considérese además el con junto

$$E = \{u \in C[0,T]: \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \;\; \forall\, t\}$$

Defínase el operador

$$T: \; E \to C[0,T]$$

compacto y puede verse que $T(E) \subset E$ (acá, E cerrado, convexo y acotado).

Siendo $\lambda \geq 0$, resulta que si

$$\begin{cases} u'' - \lambda u \geq 0 \\ u(0), \;\; u(T) \leq 0 \end{cases}$$

entonces, $u \leq 0$ en *[0,T]*. Esto puede justificarse de la siguiente manera:

Para $\lambda > 0$, si existe un t_0 tal que $u(t_0) > 0$, puede suponerse que $u(t_0)$ es máximo y entonces

$$u''(t_0) \geq \lambda u(t_0) > 0$$

lo cual es un absurdo.

Ahora, si $\lambda = 0$, entonces $u'' \geq 0$ y el resultado es trivial.

Elijase $\lambda < 0$ tal que $\varphi(u) = f(t,u) - \lambda u$ (t fijo) sea decreciente en u para $\alpha(t) \leq u \leq \beta(t)$.

Se resuelve para $v > 0$ (fijo) el siguiente problema:

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = f(t,v) - \lambda v \\ u(0) = A, \quad u(T) = B \end{cases} \tag{3.1}$$

El operador $T: E \rightarrow C[0,T]$ es compacto (se requiere que sea compacto porque es una de las hipótesis del teorema de Schauder; debe recordarse que esto significa que para cualquier acotado *C*, la clausura de *T(C)* es compacta), y además $T(C) \subset E$, pues si $\alpha \leq v \leq \beta$, entonces:

$$u'' - \lambda u = f(t,v) - \lambda v \leq f(t,\alpha) - \lambda\alpha \leq \alpha'' - \lambda\alpha$$

luego,

$$(u-\alpha)'' - \lambda(u-\alpha) \leq 0$$

y

$$(u-\alpha)(0), \qquad (u-\alpha)(T) \geq 0$$

así, $(u-\alpha) \geq 0$.

Del mismo modo $(u-\beta) \leq 0$, entonces $\alpha \leq u \leq \beta$, luego por el teorema de Schauder, *T* tiene un punto fijo (que en este caso se obtiene dentro de *E*) que es solución de (3.1).

V. PROBLEMA SEMILINEAL

Se analiza a continuación la ecuación:

$$u'' - f(t,u,u') = 0 \tag{4.2}$$

con las condiciones de borde

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

donde $f: [0,1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Supóngase entonces que $\alpha \leq \beta$ son funciones suaves que satisfacen las condiciones:

$$\alpha'' \geq f(t,\alpha,\alpha')$$

Y

$$\beta'' \leq f(t,\beta,\beta')$$

con

$$\alpha(0) \leq u_0 \leq \beta(0), \quad \alpha(1) \leq u_1 \leq \beta(1)$$

A continuación se trabaja con el espacio $C^1([0,1])$, con la norma definida por

$$\|u\|C^1 = máx\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\},$$

En consecuencia, si se desea aplicar el teorema de Schauder en este espacio se debe encontrar una región invariante que además de ser conexa y cerrada, esta debe ser acotada. Esto requiere obtener estimaciones a priori de la derivada. Más precisamente, lo que se hace es encontrar una solución del problema en la región

$$C = \{u \in C^1([0,1]):\ \alpha \leq u \leq \beta, \|u'\|_\infty \leq R\},$$

para cierto *R* apropiado. De forma similar a la solución del problema (1.1), se buscará una solución del problema truncado: dado $\lambda > 0$, se plantea:

$$u'' - \lambda u = f\left(t, P(t,u), Q(u')\right) - \lambda P(t,u)$$

con condiciones $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$, donde

$$P(t,u) = \begin{cases} \alpha(t), & si\ \alpha(t) > u \\ u, & si\ \alpha(t) \le u \le \beta(t) \\ \beta(t), & si\ \beta(t) < u \end{cases}$$

y

$$Q(v) = \begin{cases} v, & |v| \le R \\ R, & si\ v > R \\ -R, & si\ \ v < -R \end{cases}$$

Acá, de nuevo el término de la derecha está acotado y el teorema de Schauder (ahora en $C^1([0,1])$) garantiza que existe al menos una solución. Se demuestra que bajo ciertas condiciones sobre la función f puede asegurarse que en realidad u es solución del problema original.

Supongamos que $u - \beta$ alcanza un valor máximo positivo en cierto $t_0 \in (0,1)$, entonces,

$$P\left(t_0, u(t_0)\right) = \beta(t_0)$$

Para aplicar la definición de super-solución se tendría que garantizar que

$$Q\left(u'(t_0)\right) = \beta'(t_0)$$

Pero nótese que t_0 es un punto crítico de $u - \beta$, de modo que $u'(t_0) = \beta'(t_0)$. Entonces basta pedir que

$$R \ge máx\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty, \}$$

para asegurar que $\alpha \le u \le \beta$.

Se necesita luego probar que $\|u'\|_\infty \le R$. Para esto se impone a la función f la condición de *Nagumo.*

Se va a pedir que en el conjunto

$$E = \{(t,u,v)\colon\ t \in [0,1], \alpha(t) \le u \le \beta(t), |v| < R\} \quad (4.3)$$

se cumpla :

$$|f(t,u,v)| \le \varphi(|v|) \quad (4.4)$$

donde φ es una función que se llamará *conveniente.* Se trata probar que la solución u del problema anterior verifica que $|u'(t)| \le R$ para todo t; si esto no sucede y se tuviera por ejemplo que $u'(t) > R$ para algunos valores de t, entonces sería útil saber que entre ciertos $t_0 < t_1$ se tiene que $u'(t) < R$, donde $r > 0$ es una constante que no depende de u. Ahora bien, el único valor que se puede asegurar que la función u' alcanza efectivamente el valor que proporciona el teorema del valor medio:

$$u(1) - u(0) = u'(\xi)$$

para algún ξ. Entonces basta elegir

$$r = |u(1) - u(0)|$$

e imponer la condición que R sea estrictamente mayor que r.

Para terminar de deducir la condición de *Nagumo*, obsérvese ahora que:

$$\int_r^R \frac{ds}{\psi} = \left| \int_{t_0}^{t_1} \frac{u''(t)}{\psi(u'(t))} dt \right| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \frac{f(t,u,u')}{\psi(u'(t))} dt \right|$$

y como $\alpha \le u \le \beta$ y para todo $t \in (t_0, t_1)$ se cumple también

$$r < u'(t) < R$$

entonces:

$$\int_r^R \frac{ds}{\psi(s)} \le \int_{t_0}^{t_1} \frac{\psi(u'(t))}{\psi(u'(t))} dt = t_1 - t_0 \ \le 1$$

Un razonamiento análogo se puede hacer en el caso $u'(t) < -R$, de forma que la condición apropiada es la que se expresa en la siguiente proposición denominada *proposición de Nagumo.*

Sean $r = |u_1 - u_0|$ y $R \geq máx\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty, r\}$ y asúmase que *f* cumple la condición (4.4) sobre el conjunto *E* definido en (4.3) para cierta ψ tal que:

$$\int_r^R \frac{ds}{\psi(s)} > 1$$

así, toda solución *u* del problema

$$u'' = f(t, u, Q(u')), \qquad u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1$$

con $\alpha \leq u \leq \beta$ verifica que:

$$\|u'\|_\infty < R$$

En particular, el problema (4.2) tiene solución.

Un resultado análogo se cumple para el problema periódico (que queda como problema abierto); en este caso α y β son funciones periódicas y en la condición de *Nagumo* se considera $r = 0$.

VI. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando el teorema de Schauder, la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de un problema periódico no lineal.

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario (2.1), se probó que el operador *T* definido para el problema (3.1) tenía un punto fijo, el cual dio solución a (1.1). Además se mostró que el problema (4.2) tiene solución aplicando el teorema de Schauder utilizando la condición (4.4).

Queda como problema abierto el caso periódico con condición de Nagumo $r = 0$.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

REFERENCIAS

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] AMSTER, P.G. Resolution of SemilinearEquations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (ZeitschriftfürAngewandteMathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.

[4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.