

Identificación y modelamiento matemático, a partir de datos entrada-salida de un sistema de presión de aire

Identification and mathematical modeling, from input-output data of an air pressure system

Manuel Nieto Arias, Víctor Ortiz Bravo, Walter Serna Serna

Ingeniería Física, Grupo de investigación Applied Neuroscience, Instituto de Epilepsia y Parkinson del eje cafetero Pereira, Universidad Tecnológica de Colombia

manieto@utp.edu.co

vialortiz@utp.edu.co

wserna@utp.edu.co

Resumen— Este artículo presenta dos metodologías para determinar el modelo matemático de un sistema de presión de aire a través de los datos de entrada y salida de una planta cuando no es posible encontrarlo por medio de las ecuaciones fundamentales de la física. La primera a través del análisis de la gráfica obtenida de los datos de presión del sistema respecto al tiempo y la segunda utilizando un modelo de estimación por variables instrumentales. Como prueba experimental, se realiza el modelamiento del sistema físico con ambos métodos. El sistema de presión de aire fue construido para operar en un rango de presiones de 0-40 mmHg. Los resultados de los modelos obtenidos fueron evaluados a través de la comparación directa de la salida modelada contra la señal real del sistema.

Palabras clave— Mini-bomba eléctrica, sistema de presión, bomba de aire, función de transferencia, presión, tensión.

Abstract— This article shows two methodologies to define the mathematical model of an air pressure system through incoming and outgoing data of a physical device if for any reason it is not possible to find it with the physics essential equations. The first one is based in the analysis of the obtained curve from data; the second one uses an algorithm based on error prediction. As study proof, the modeling of both methods of an air pressure system were computed. The system was created to work in a pressure range of 0-40 mmHg. The results of the obtained models were evaluated through the direct comparison of the modeled output against the actual signal of the system.

Key Word— Mini-electric pump, pressure system, air pump, transfer function, pressure, voltage.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento de sistemas físicos generalmente se hace con base en expresiones matemáticas que describen las relaciones entrada/salida a través de

parámetros y variables que representan completa o parcialmente el sistema, y de esta manera: evaluar su estabilidad, sobreimpulso, clasificar el tipo de amortiguamiento, estimar el tiempo de establecimiento. Estas características sirven de soporte en el diseño de un control que actúe sobre el sistema para que tenga un comportamiento determinado [1].

En algunas ocasiones, cuando se modelan los sistemas físicos a través de leyes que representan sus características dinámicas, no es posible tener acceso a todos los parámetros o variables que intervienen en el proceso y es necesario la aplicación de técnicas heurísticas para describir su comportamiento, basándose únicamente en datos observables de entrada y salida del sistema.

Las metodologías que se implementan en este trabajo muestran cómo, a partir de la entrada de la planta y del muestreo de la señal de salida, se obtiene una función de transferencia que representa el comportamiento del sistema de presión de aire. En este artículo se implementan dos metodologías que permiten determinar la función de transferencia, a partir de la generación de una base de datos con el registro de la señal de salida dada una señal de entrada escalón. Para el método 1, se grafican los datos de la salida real y estimada del sistema y según la forma de la curva y sus características, se define a qué ecuación general de una función de transferencia se aproxima según el orden, y a partir de ellos, se halla la ganancia del proceso y la constante del tiempo. Finalmente se realizan los ajustes necesarios para minimizar el error. Para el método 2, se utiliza un modelamiento paramétrico por variables instrumentales en la cual se debe ingresar la base de datos y el orden del sistema y automáticamente se obtiene la función de transferencia del sistema.

Después de obtenidas las dos funciones de transferencia por

ambos métodos, se realiza una comparación entre estas, para determinar cuál es el modelo matemático más aproximado.

II. MARCO TEÓRICO Y EXPERIMENTAL

A. Descripción del sistema físico

Para la verificación de la metodología se diseñó un sistema de presión de aire y se dividió en cuatro etapas mostradas en la figura 1,

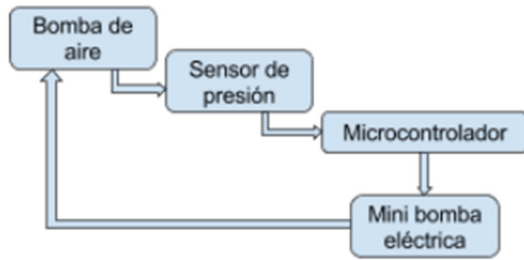


Figura 1. Esquema por fases para el montaje de la planta

La parte central del diseño se basa en un microcontrolador, el cual registra la presión sensada al interior de la bomba de aire y adicionalmente controla la activación de la mini-bomba eléctrica a través de una señal PWM que cambia su ciclo útil para disminuir o incrementar la tensión en los terminales del motor y, por consiguiente, la presión generada. Para esto se usó la tarjeta de desarrollo Arduino UNO, con 5 puertos de adquisición analógicos y 6 puertos generadores de señal PWM.

En cuanto a la generación de flujo de aire se utilizó una mini-bomba eléctrica KPM14A que trabaja con una tensión de operación de 3 V a 380 mA y una presión máxima de 350 mmHg.

Para la bomba de aire se utilizó una almohadilla de látex con dimensiones de 10 x 10 cm, con una capacidad aproximada de 0,12 L cuenta con 3 tuberías que cumplen las siguientes funciones: entrada de aire, conexión con el sensor de presión, y escape de aire. Fue necesario incluir el escape de aire, ya que de no implementarlo, el sistema se vuelve inestable debido a que se seguirá inflando hasta que alguno de los elementos colapse.

Teniendo en cuenta que el rango de corriente máxima entregada por el microcontrolador es de 20 mA, es necesario la amplificación de la señal en corriente para el funcionamiento de la mini bomba. Para esto se realizó un circuito de amplificación de corriente con un transistor

2N2222, en configuración de emisor común, el cual garantiza que la señal conserve sus características en amplitud y frecuencia.

Se utiliza el sensor analógico de presión de aire MPXV4006G, el cual está hecho de un material piezoresistivo que se deforma según la presión a la que está sometido y tiene un rango de operación de presión de 0 - 47 mmHg. El sensor produce una tensión proporcional en sus terminales en un rango de 0 - 5 V, donde 0 V equivale a 0 mmHg y 5 V equivale a 47 mmHg, y tiene la siguiente ecuación característica:

$$V_{out} = 0,1021 * P + 0,225 \tag{1}$$

Donde V_{out} es la tensión entregada por el sensor y P es la presión de aire a la que está sometido

Para reducir el ruido eléctrico que ocasiona la mini-bomba eléctrica sobre la señal obtenida en el proceso de adquisición y digitalización de la señal, se implementó un filtro digital pasa bajas Butterworth de tercer orden [2] con una frecuencia de corte a 150 Hz dado en la ecuación (2).

$$F(z) = \frac{0,007 * z^3 + 0,0022 * z^2 + 0,0022 * z + 0,007}{z^3 - 2,615 * z^2 + 2,3006 * z - 0,6796} \tag{2}$$

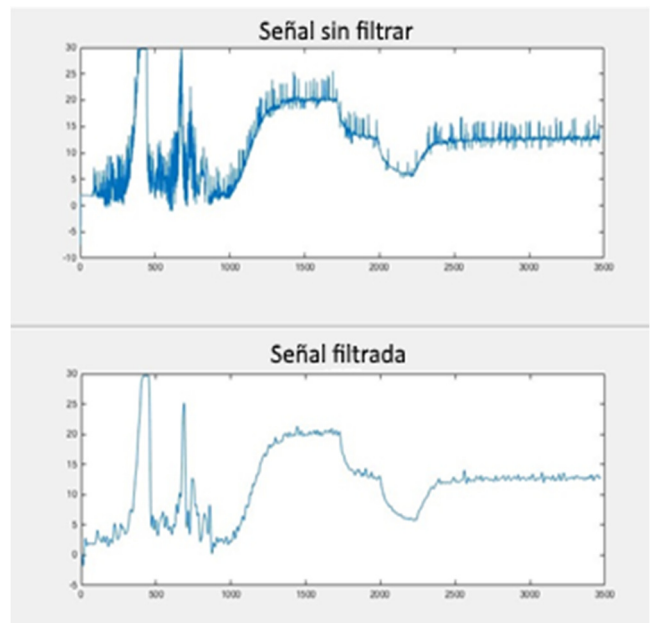


Figura 2. Gráfica de presión (mmHg) vs muestras por unidad de tiempo (ts=30ms). Respuesta antes (inferior) y después (superior) de la aplicación del filtro digital pasa bajas

Al filtrar la señal, se pudo obtener una señal más limpia del

valor de presión del sistema, como se observa en la figura 2, donde se muestra tanto la señal adquirida originalmente sin filtrar, como la señal filtrada.

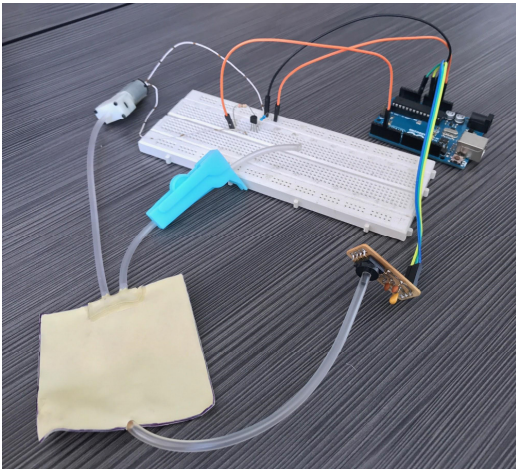


Figura 3. Sistema final

En la figura 3 se puede observar la estructura del sistema implementado, el cual consta del microcontrolador, el sensor de presión, la bomba de aire, el escape o alivio, una etapa de amplificación de corriente y la mini bomba eléctrica

B. Modelamiento matemático

El sistema presentado tiene como entrada la tensión en los terminales del motor DC de la mini-bomba y la salida es la presión interna en la bomba de aire. Un esquema de la representación gráfica de la entrada de planta se observa en la figura 4 .

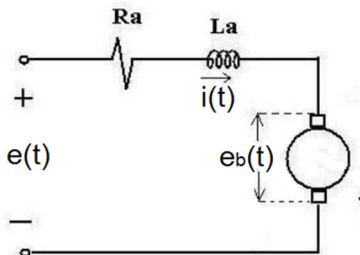


Figura 4. Esquema circuital equivalente de un motor dc

Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff en el circuito de la figura 4 se obtiene:

$$e(t) = R * i(t) + L * \frac{di}{dt} + e_b(t) \quad (3)$$

Donde, $e(t)$ es la tensión de control, $i(t)$ es la corriente de armadura, R y L son parámetros físicos del motor y $e_b(t)$ es la tensión en la armadura.

Para modelar la salida del sistema, es decir, presión existente en la bomba de aire, se utilizó la ecuación (4), que corresponde a la ecuación de gases ideales de Boyle, la cual relaciona la presión y el volumen de un cuerpo.

$$p(t) = k * v(t)^{-1} \quad (4)$$

Donde, $p(t)$ es la presión existente, k es una constante y $v(t)$ es el volumen que ocupa el gas. De esta manera la función de transferencia está dada por:

$$H(t) = \frac{p(t)}{e(t)} \quad (5)$$

$$H(t) = \frac{k}{v(t)[R*i(t)+L*\frac{di}{dt}+e_b(t)]} \quad (6)$$

Como la tensión en la armadura, $e_b(t)$ es un dato de la mini-bomba eléctrica, el cual no se puede medir de forma directa, no es posible encontrar todos los parámetros para aplicar esta función de transferencia por lo que es necesario emplear metodologías heurísticas para el modelamiento del sistema.

C. Modelamiento heurístico

- a. Método 1: Aproximación del modelo por medio de una función de transferencia de primer orden.

Para la obtención de forma experimental de la función de transferencia del sistema de presión, fue necesario alimentar el sistema con un escalón, para este caso se usó una tensión en la entrada de 2,15 V y se muestrea la salida del sistema, representado en la figura 5.

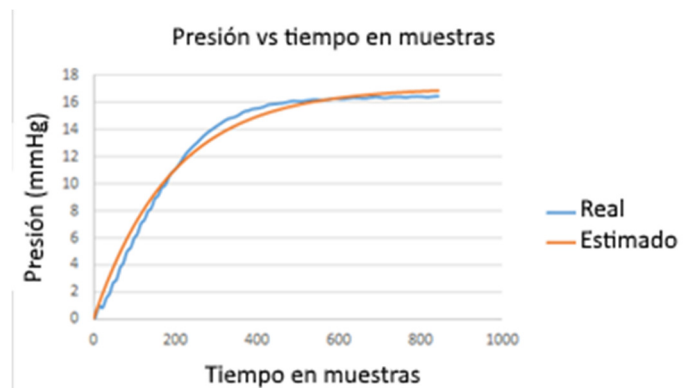


Figura 5. Gráficas de presión(mmHg) vs muestras por unidad de tiempo(ts=30 ms) de los datos reales y estimados.

Como se puede observar en la figura 5, el sistema tiene el comportamiento de una planta subamortiguada, es por esto que se decide representar a través de una función de transferencia general de primer orden [5].

Según la ecuación de una función de transferencia general de un sistema de primer orden, la salida del sistema depende de su entrada y de las constantes k y T ,

$$y(t) = k * \Delta u [1 - \exp(-\frac{t}{T})] \tag{7}$$

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1} * U(s) \tag{8}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts+1} \tag{9}$$

donde k se denomina ganancia del proceso y T es la constante de tiempo del sistema.

Dichas constantes se hallan ajustando una gráfica estándar a partir de la ecuación (7), con la gráfica obtenida experimentalmente a través del cuadrado del error donde se restan los valores de la respuesta real y estimada.

$$Ec = \sum_{i=1}^n [y(i) - y_e(i)]^2 \tag{10}$$

Se suma el error cuadrático de todas las medidas y se ajustan hasta que este error sea el mínimo posible, ver figura 5. Con estos datos se encuentran k y T , y se obtienen los siguientes valores:

$$k = 7,96$$

$$T = 5,74$$

De esta manera, reemplazando k y T en la ecuación (9)

$$H(s) = \frac{7,96}{5,74s + 1} \tag{11}$$

Dividiendo todo entre 5,74 tenemos que

$$H(s) = \frac{1,38}{s + 0,17} \tag{12}$$

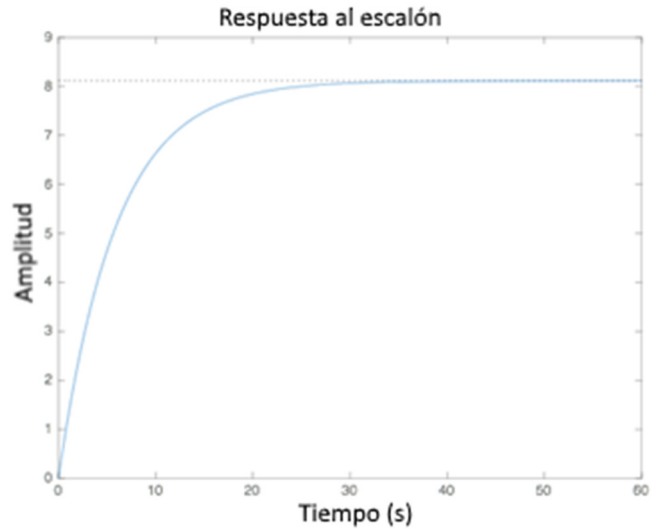


Figura 6. Respuesta al escalón unitario de la función de transferencia hallada experimentalmente

Al excitar la función de transferencia resultante del modelado matemático del sistema (Ecuación 12) con un escalón, según lo observado en la figura 6, se puede comprobar que es un sistema subamortiguado y tiene un comportamiento similar al comportamiento de la planta real.

b. Método 2: Modelo paramétrico por variables instrumentales

Adicionalmente, para verificar la función de transferencia experimental (ver ecuación 12) se utilizó un modelo paramétrico por variables instrumentales, para a partir de los datos de entrada y salida del sistema, estimar la función de transferencia de la planta. Primero se implementa el método de estimación de parámetros por mínimos cuadrados en el cual se calculan los parámetros reales del sistema, de tal forma que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados, que mide la amplitud del error sea mínimo.

$$\epsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T * \theta \tag{13}$$

Donde $\epsilon(t, \theta)$ es el error de predicción, $y(t)$ la salida del sistema, φ^T es un vector formado por entradas y salidas anteriores y θ es el vector de parámetros modelados.

Se define la siguiente función del error

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [y(t) - \varphi^T * \theta]^2 \tag{14}$$

Luego se determina un valor de θ que minimiza la función anterior y que conforma la estimación del modelo por variables instrumentales:

$$\theta_{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi(t) [y(t) - \varphi^T * \theta] = 0 \right\} \tag{15}$$

Donde los elementos del vector $\xi(t)$ son las variables instrumentales, que resultan de aplicar un filtro lineal al vector de regresión lineal .

Para lograr una adecuada identificación del sistema se calculó y tabuló la salida del sistema ante diferentes valores de tensión a la entrada de la mini bomba eléctrica . La tensión eléctrica se mantiene constante en la entrada de la mini-bomba hasta que la presión del sistema se estabilice, luego se apaga la mini-bomba y se repite el proceso con un valor diferente de alimentación.

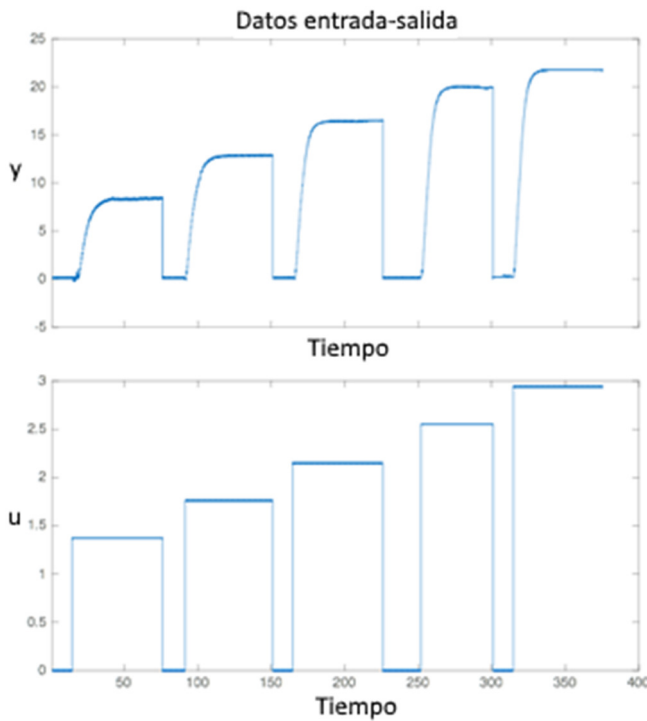


Figura 7. Salida del sistema y (mmHg) y entrada del sistema u (V) vs muestras por unidad de tiempo ($t_s=30$ ms)

En la figura 7 la gráfica de y corresponde a la presión existente en la bomba de látex, medida por el sensor y u es la tensión en los terminales de la mini bomba eléctrica, a partir de estos datos, almacenados en vectores se ingresaron al algoritmo de estimación y se obtuvo la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{2.024}{s+0,2876} \quad (16)$$

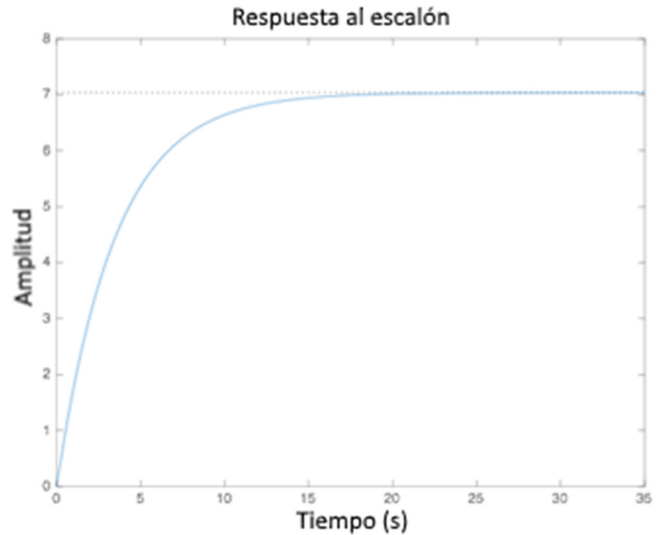


Figura 8. Respuesta al escalón de la planta estimada (mmHg) vs tiempo(s) (Ecuación 16)

Para verificar qué tan aproximada es la función de transferencia encontrada con el comportamiento real del sistema, se realiza una prueba en donde se alimenta la mini-bomba a diferentes valores de tensión y se registró tanto la salida real de la planta, es decir, la presión existente en la bomba de aire y la salida del sistema modelado matemáticamente obteniendo los resultados mostrados en la figura 9.

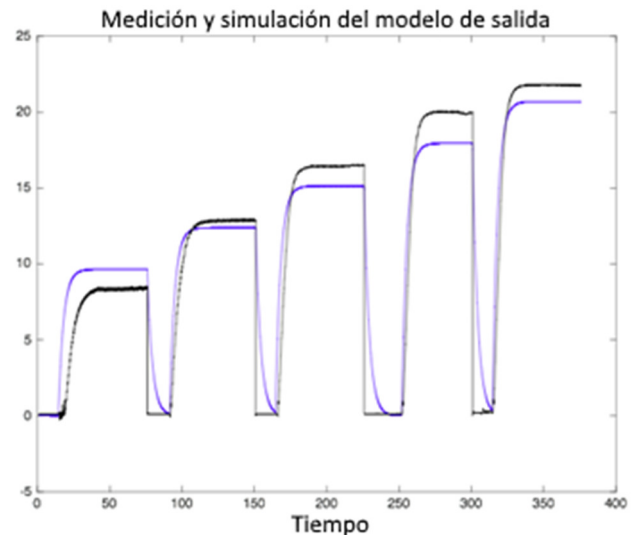


Figura 9. Salida del modelo simulado (azul) y el real (negro) (mmHg) vs muestras por unidad de tiempo($t_s=30$ ms)

Se puede observar que la función de transferencia obtenida (ecuación 16) es ligeramente diferente respecto al modelo real, ya que para la caracterización de este sistema se usaron 5 referencias diferentes de entrada y se registró su

comportamiento de salida, pero entre más datos se tengan, mejorará considerablemente su estimación y modelamiento.

c. Evaluación comparativa

Para realizar la comparación entre las respuestas de la señal real, la señal obtenida con el modelo del método 1 y la señal obtenida con el modelo del método 2, se realizó una prueba donde se modifica el ciclo útil del PWM que alimenta el motor, obteniendo en sus terminales una tensión de 2,55 V, y se registraron las 3 señales de salidas ante esta misma entrada obtenido el resultado que se presenta en la figura 10.

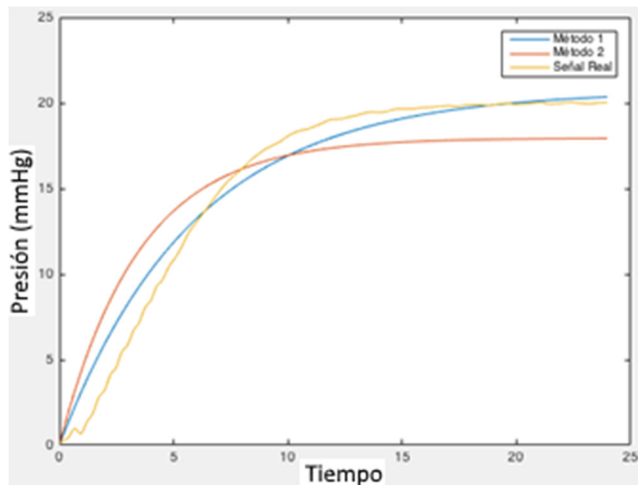


Figura 10. Comparación respuesta real y respuestas modeladas.

Como se observa en la figura 10, ninguna de las 2 señales obtenidas a través de los modelos de entrada-salida siguen completamente la respuesta real del sistema, pero sí se puede evidenciar que el modelo matemático obtenido por medio de la función de transferencia general de un sistema de primer orden (método 1) tiene un error en estado estacionario de 2.16%, el cual es menor que la señal obtenida con método 2, que presenta un error de 15.18% respecto al comportamiento real.

III. DISCUSIÓN

Representar el comportamiento de un sistema a través de un modelo matemático permite conocer los parámetros más representativos de su funcionamiento, para a partir de estos elegir una acción de control capaz de llevar este sistema a una respuesta deseada.

En los sistemas reales es muy común encontrar que no es posible modelarlos matemáticamente a través de ecuaciones fundamentales de la ciencia porque no se tiene acceso a parámetros básicos del sistema. Los modelos obtenidos a

partir de datos entrada-salida son usados frecuentemente en la industria, ya sea por lo mencionado anteriormente o por facilitar el proceso, pues en ocasiones las ecuaciones que rigen el comportamiento de ciertos sistemas son muy complejas y requieren de un desarrollo matemático que implica un grado elevado en el manejo de expresiones algebraicas y métodos numéricos.

Aunque es claro que los modelos a partir de los datos de la entrada y la salida son aproximaciones al comportamiento real de los sistemas, es una muy buena herramienta, rápida y de fácil implementación con resultados aceptables que permite ejecutar acciones de control sobre la planta para ajustar su comportamiento.

IV. CONCLUSIONES

- La metodología implementada, permitió encontrar una función de transferencia aproximada a partir de los datos entrada-salida, que modela matemáticamente el comportamiento del sistema de presión de aire.
- El método 1 encuentra una función que se ajusta mejor al comportamiento real del sistema. Este se logra solo con un valor de referencia a la entrada, mientras que el método 2 permite procesar múltiples referencias de entradas con sus salidas. Sin embargo, la señal estimada tiene más error que la señal de salida, esta función de transferencia, aunque toma en cuenta más parámetros, no representa adecuadamente el sistema físico.

V. AGRADECIMIENTOS

La presente investigación fue realizada gracias al apoyo de la convocatoria 715 – 2015 para proyectos de investigación y desarrollo en ingenierías del Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación “Francisco José de Caldas” – COLCIENCIAS, bajo el código 499171552717.

VI. REFERENCIAS

- [1]. C. T. Chen, “Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods”, Oxford University Press, Inc., 1995.
- [2]. L. E. Avendaño, “Fundamentos de instrumentación”, Universidad Tecnológica de Pereira, 2002, pp 272-274.
- [3]. A. E. Fitzgerald, U. Charles, S. D. Milanés & N. S. Jorje, “Máquinas eléctricas”, McGraw-Hill, 6ª ed., 1992.

- [4]. R. C. Dorf, R. H. Bishop, S. D. Canto, R. D. Canto, & S. Dormido, “*Sistemas de control moderno*”, Pearson Prentice Hall, 2005, pp 37-70.
- [5]. K. Ogata, “*Ingeniería de control moderna*”, 4^a ed., Pearson Educación, 2003, pp 146-150.
- [6]. F. R. Rubio, M. J. López, Control Adaptativo y robusto. Universidad de Sevilla, 1996, pp. 113-118.
- [7]. K. J. Aström, B. Wittenmark, “Computer-controlled systems: theory and design”, 3^a ed., Courier Corporation, 2013.
- [8]. L. E. Avendaño, “Sistemas Electrónicos Analógicos Un Enfoque Matricial”, 1^a ed., Universidad Tecnológica de Pereira, 2007.
- [9]. A. R. Hambley, N. Kumar, A. R. & Kulkarni, “Electrical engineering: principles and applications”, Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2008.
- [10]. L. Ljung, “System identification: Theory for the user”, University of Linköping, Sweden, 1998.