

## GENERALIZACIÓN DE LOS PUNTOS DE BIFURCACIÓN ZIP EN UN MODELO DE PREDADOR PRESA

### Generalization of the zip bifurcation points in an predator prey model

#### RESUMEN

En este artículo se muestra una clase original de sistema dinámico del tipo exponencial algebraico que modela la competencia entre 2 especies de predadores por una presa singular que se regenera el cual es una generalización del modelo tratado por Farkas [1984] y otros autores. Hallamos una expresión analíticas que extiende los puntos de bifurcación en estos modelos.

**PALABRAS CLAVES:** Puntos bifurcación, respuesta funcional, modelo predador-presa

#### ABSTRACT

*In this article is show a class original of dynamic system of algebraic exponential type that models to the competition between 2 species of predator by a singular prey that regenerates which is a generalization of the model treated by Farkas [1984] and other authors. We found you formulate analytical who extend the bifurcation points in these models.*

**KEYWORDS:** Points bifurcation, functional response, model predator-prey

CARLOS MARIO ESCOBAR  
CALLEJAS

Profesor Asistente, Magíster en  
Matemáticas  
Ingeniero Civil  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ccescobar@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ  
GRANADA

Profesor Auxiliar, Ph.D  
Matemático  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jorodry@utp.edu.co

#### 1. Introducción

En el estudio del problema concerniente a la validez del principio de la exclusión competitiva en ecología, para el caso de dos especies predatoras compitiendo por una presa que se regenera, el siguiente modelo ha sido ampliamente considerado por varios autores [Hubbel y Walman 1978 a,b; Koch, 1974 a,b].

$$\dot{s} = \gamma \left(1 - \frac{s}{k}\right) s - \sum_{i=2}^n m_i s \frac{x_i}{a_i + s} \quad (1.1)$$

$$\dot{x}_i = m_i s \frac{x_i}{a_i + s} - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí  $x_i$  y  $s$  son, el tamaño de la población de los predadores  $i$  y el de la presa que se regenera, respectivamente. Un crecimiento logístico de la presa se supone en ausencia del predador; la respuesta funcional es saturada de acuerdo con la cinética de Michaelis-Menten,  $\gamma > 0$  es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa,  $k > 0$  es la capacidad de carga del medio con respecto a la presa;  $m_i > 0$ ,  $d_i > 0$  y  $a_i > 0$  son la tasa de nacimiento maximal, la tasa de muerte y la constante de saturación media, respectivamente, del predador ( $i = 1, \dots, n$ ). En este modelo las constantes:

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

se introducen teniendo el siguiente significado:  $x_i$  se incrementa si y solo si  $s > \lambda_i$ , según sea  $x_i$  positivo, llegando a ser cero en  $s = \lambda_i$ . Hsu, Hubbel y Waltman [1978a] y [1978b] han mostrado en el caso  $n = 3$ , que las soluciones del sistema (1.1) correspondiente a valores iniciales positivos son acotados y permanecen en el octante positivo y que la especie predatora  $i$ -ésima puede sobrevivir únicamente si  $0 < \lambda_i < k$ , lo cual implica que  $m_i > d_i$ . También ellos han estudiado el caso genérico con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , Koch [1974a] y Hsu, Hubbel and Waltman [1978b] demuestran que, para algunos valores de los parámetros, algunas soluciones periódicas pueden obtenerse en el octante positivo significando que la coexistencia es posible. Smith [1982] ha probado (usando teoría de bifurcación) que, en el caso  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  existen soluciones periódicas en el octante positivo para valores suficientemente pequeños de  $|\lambda_1 - \lambda_2|$  y  $k - (a_1 + 2\lambda_1)$ . Wilken [1982] y Farkas [1984] ha tratado el caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Ellos han establecido, en el caso  $a_1 = a_2 = a$ , que si  $k \leq a + 2\lambda$ , entonces hay un segmento de línea de equilibrio estable, mientras que si  $k > a - 2\lambda$  entonces "todas las tres especies sobreviven en un ciclo límite permanentemente". Él también ha

probado que; en el caso  $a_1 > a_2$  si  $k > a + 2\lambda$ , entonces  $x_2$  va a cero,  $s$  y  $x_1$  permanecen en un ciclo límite; si  $k = a_1 + 2\lambda$ , entonces  $x_2$  va a cero  $s$  y  $x_1$  tienden al equilibrio; si  $k < a_1 + 2\lambda$ , entonces todas las tres especies sobreviven y la solución tiende a un punto de equilibrio del segmento de la línea de equilibrio. Nosotros consideramos un modelo original del tipo Exponencial Algebraico el cual generaliza el modelo (1.1) y hallamos una expresión analítica explícita para los puntos de bifurcación, que extiende la ya conocida de  $k = a + 2\lambda$ , en la bifurcación de zip hallada por Farkas [1984].

**2. Modelo Original del tipo Exponencial algebraico.**

A continuación se estudia los puntos bifurcación de una clase de modelo en dinámica de poblaciones del tipo (1.3) el cual es una generalización del modelo tratado (1.1), éste parte de la hipótesis, de que el ecosistema consiste de tres especies; dos predadores y una presa singular, la cual se regenera. En este modelo se nota el punto encima de la letra como diferenciación con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma g(s, k) - \sum_{i=2}^n p(s, a_i)x_i \\ \dot{x}_i &= p(s, a_i)x_i - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ g(s, k) &= \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^m\right), \\ p(s, a_i) &= \left(\frac{As^n}{Ba_i^r + D} + \frac{cqs}{(a_i^{-v} + F)(qs + a_i)}\right), \quad (1.3) \\ &\left(m > 0, k > 0, s \geq 0, a_i > 0, A \geq 0, c \geq 0, \right. \\ &\left. B > 0, F \geq 0, v \leq 0, q \geq 0, 0 \leq n \leq 1\right), \end{aligned}$$

donde  $p(s, a_i)$  representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional del predador  $i$ ,  $g(s, k)$  significa la resistencia ambiental del medio al crecimiento de la presa y  $a_i$  representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del predador  $i$ . Las demás variables y parámetros tienen idéntico significado que en el sistema (1.1). Se presume además que en el modelo se ha mostrado [5] que la tasa de desarrollo de la presa  $g$  y la respuesta funcional del depredador  $p$  son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones naturales denominadas de Butler- Farkas:

La función  $g$  satisface las condiciones:

$$g \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty), R), g \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$g(0, k) = 1 \quad g'_s(s, k) < 0 < g''_{sk}(s, k) \geq 0, k > 0, \quad (1.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma g(s, k) = \gamma, \quad s \geq 0. \quad (1.5)$$

A la función  $g$  se le impone condiciones de uniformidad en  $[\delta, s_0]$  para cualquier,  $0 < \delta < s_0$  y, la integral posiblemente impropia  $\int_0^{s_0} g'(s, k)$  debe ser uniformemente convergente en  $[k_0, \infty)$ , para cualquier valor  $k_0 > 0$ . Por último se tiene la condición siguiente sobre  $g$ :

$$(k - s)g(s, k) > 0, \quad s \geq 0, k > 0, s \neq k. \quad (1.6)$$

La función que representa la respuesta funcional del predador  $i$ ,  $p(s, a_i)$  con  $a_i$  constante, ( $i = 1, \dots, n$ ) satisface las siguientes condiciones:

$$p \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty), R), p \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$p(0, a_i) = 0, \quad p(s, a_i) > 0, \quad s > 0, a_i > 0, \quad (1.7)$$

$$p_s(s, a) < \frac{p(s, a)}{s}, \quad s > 0, a > 0 \quad (1.8)$$

$$p_a(s, a) < 0, \quad s > 0, a > 0. \quad (1.9)$$

Las condiciones de (1.4) a (1.9) son condiciones apropiadas para el modelo. A continuación se encuentra para el sistema (1.3) los puntos de bifurcación que exhiben bifurcación de zip y que extienden el valor de bifurcación en el sistema (1.1) dada por

$$k_0 = a + 2\lambda. \quad (1.10)$$

En Escobar [2003] se demuestra que los valores de bifurcación del sistema (1.3) coinciden con los de los del sistema degenerado asociado por lo cual nos restringimos al análisis de estos modelos.

**2.1 Resultados del modelo degenerado ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, a_1 = a_2 = a$ ).**

**2.1.1 Planteamiento del sistema**

Se considera el sistema de ecuaciones diferencial tridimensional (1.3) que describe la competencia de dos depredadores con idéntica respuesta funcional  $p$  por una presa singular que se regenera, bajo el supuesto de que existe una cantidad de presa común a ambos predadores, bajo la cual sus tasas de nacimiento y muerte llegan a ser iguales, es decir, existen un parámetro umbral, y un parámetro de escala a tales que  $\lambda_i = \lambda$  y  $p(\lambda, a_i) = d_i = d$ . Tal es el caso de la competencia de especies similares o también, de la competencia intraespecífica entre la misma especie depredadora. En lo que sigue se considera el sistema (1.3) satisface las condiciones Butler [1983] y Farkas [1987]. A través de este numeral se supone que la siguiente desigualdad se tiene:

$$0 < \lambda_i < k. \tag{1.11}$$

Esta desigualdad (1.11), conjuntamente con las hipótesis adoptadas, implican que el sistema (1.3) toma la forma:

$$\dot{x} = \gamma g(s, k) - \sum_{i=2}^n p(s, a_i) x_i \tag{1.12}$$

$$\dot{x}_i = p(s, a_i) x_i - d x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**2.1.2 Equilibrios del sistema**

Los equilibrios del sistema (1.12) son  $Q_1(0, 0, 0)$ ,  $Q_1(k, 0, 0)$ , y los puntos del segmento de línea recta  $L_k$  en el octante positivo del espacio  $s, x_1, x_2$ :

$$L_k = \left\{ (s, x_1, x_2) \in R^3 : p(\lambda, a) x_1 + p(\lambda, a_2) = \gamma g(\lambda, k) \right. \\ \left. s = \lambda, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \right\} \tag{2.1}$$

Los puntos que pertenecen a  $L_k$  se denotan con  $(\lambda, \xi_1, \xi_2)$ . Los puntos extremos del segmento de línea, es decir, los equilibrios en los planos  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , respectivamente, son:

$$P_1 = (\lambda, 0, \xi_2) = \left( \lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a)} \right), \tag{2.2}$$

$$P_2 = (\lambda, \xi_1, 0) = \left( \lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a)}, 0 \right).$$

Es fácil ver por linealización que  $Q_1$  es inestable, y  $Q_2$  es asintóticamente estable para  $k < \lambda$ , e inestable para  $k > \lambda$ . Se conoce (Hsu y otros, 1978a; Butler, 1983) que si  $k > \lambda$  la desigualdad (1.11) es una condición necesaria para la supervivencia de cada predador. Por la condición (1.6), si  $k$  es menor que  $\lambda$  entonces  $L_k$  es vacío, y si  $k = \lambda$ , entonces  $L_k$  consta sólo del origen  $Q_1$ . Por lo tanto nos limitaremos al estudio de los puntos sobre el segmento de línea recta  $L_k$ .

Al dividir la tercera ecuación por la segunda ecuación del sistema (1.12) se obtienen las ecuaciones de las trayectorias que satisfacen la ecuación diferencial  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}$ . Así, se consigue que la función  $\frac{x_2}{x_1}$  sea una integral primera del sistema (1.12). Como una consecuencia se tiene que, los planos:

$$\frac{x_2}{x_1} = c, \quad c \geq 0, \tag{2.3}$$

son superficies invariantes del sistema (1.12), donde  $c$  es una constante arbitraria no negativa; es claro que estas superficies particionan completamente el octante positivo,  $s \geq 0, x_1 > 0, x_2 \geq 0$ , es decir a través de cada punto en este octante pasa una y sólo una superficie de la familia (2.3). Se fija el valor de  $c$  y se considera la

restricción del sistema (1.12) a la variedad invariante (2.3) parametrizada por  $s$  y  $x_1$

$$\dot{s} = \gamma \lambda g(s, k) - x_1 p(s, a) - c x_1 p(s, a) \tag{2.4}$$

$$\dot{x}_1 = x_1 p(s, a) - p(\lambda, a) x_1.$$

Los equilibrios del sistema (2.4) son  $(s, x_1) = (0, 0); (s, x_1) = (k, 0)$  y el punto singular en el cual la línea  $L_k$  intercepta (1.5). Así el punto de intersección se denota con  $(\lambda, \xi_1, \xi_2)$  donde  $\xi_2 = c \xi_1$ , y  $\xi_1$  es la solución dada por:

$$\xi_1 = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{(c + 1) p(\lambda, a)}. \tag{2.5}$$

Es igualmente fácil ver que los equilibrios  $(0, 0)$  y  $(k, 0)$  son inestables. Si se estudia la estabilidad del equilibrio  $P(k) = (\lambda, \xi_1)$  del sistema (2.4), donde  $\xi_1$  es la solución positiva de (2.5), la capacidad de carga  $k$  puede ser considerada como un parámetro de bifurcación tal que si  $k > \lambda$  es variada, la línea de equilibrio  $L_k$  se mueve paralelamente y corta los planos (1.5) en diferentes puntos  $(\xi_1(c, k), \xi_2(c, k))$ . Se usa la notación abreviada  $\xi_1 = \xi_1(c, k)$  en algunas ocasiones. El siguiente teorema está relacionado con el sistema (2.4) sobre la variedad definida por (2.3).

**Teorema 2.1.1.** *Existe un único  $k_0 > \lambda$  tal que si  $\lambda < k < k_0$ , el equilibrio  $(\lambda, \xi_1(c, k))$  del sistema (2.4) es asintóticamente estable con región de atractividad  $\{(s, x_1) : s > 0, x_1 > 0\}$ ; en  $k_0$  el sistema está bajo una bifurcación de Hopf supercrítica o subcrítica, dependiendo del signo de la constante de Poincaré-Liapunov. Si la bifurcación de Hopf es supercrítica, existe un  $\delta > 0$  tal que para  $k_0 < k < k_0 + \delta$ , en el sistema (1.6) tiene una única trayectoria cerrada dentro de una vecindad de  $(\lambda, \xi_1(c, k))$  rodeando este punto de equilibrio. Esta trayectoria cerrada es orbital asintóticamente estable. Para el modelo considerado el punto de bifurcación  $k_0$  viene dado por*

$$k_0 = \lambda \left( \frac{\frac{A \lambda^n}{a^r B + D} + \frac{c \gamma \lambda (m+1)}{(a^{-v} F)(a + q \lambda)} - \lambda \left( \frac{A n \lambda^n}{a^r B + D} + \frac{c \gamma \lambda^{m+1}}{(a^v F + 1)(a + q \lambda)^2} \right)}{\frac{A \lambda^n}{a^r B + D} + \frac{c \gamma \lambda}{(a^{-v} F)(a + q \lambda)} - \lambda \left( \frac{A n \lambda^{n-1}}{a^r B + D} + \frac{c \gamma \lambda^{m+1}}{(a^v F + 1)(a + q \lambda)^2} \right)} \right)^{\frac{1}{m}}. \tag{2.6}$$

Prueba: Se mueve el origen al punto de equilibrio  $(s, x_1) = (\lambda, \xi_1)$  del sistema (2.4) por la transformación de coordenadas  $y_1 = s - \lambda; y_2 = x_1 - \xi_1$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \gamma(y_1 + \lambda)g(y_1 + \lambda, k) - (1 + \alpha)(y_2 + \xi_1)p(y_1 + \lambda, a) \\ \dot{x}_2 &= (y_2 + \xi_1)p(y_1 + \lambda, a) - p(\lambda, a)(y_2 + \xi_1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\xi_1$  ha sido expresado en función de  $cc$ , en la expresión (2.5). El sistema (2.4) tiene (0,0) como un punto de equilibrio para  $\xi_1 \geq 0$  y  $k > \lambda$ . Si se linealiza el sistema (2.4) en el origen, el polinomio característico del sistema linealizado será:

$$D(\mu, k) = \mu^2 + \mu \left( -\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda g_s(\lambda, k) + \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \right) + \gamma \lambda g(\lambda, k) p_s(\lambda, a). \quad (2.8)$$

Aquí el término constante del polinomio característico (2.8) es positivo como consecuencia de la desigualdad (1.11), la propiedad (1.6) de la función  $g(s, k)$  y la propiedad (1.7) de la función  $p(s, a)$ , por lo tanto, la estabilidad depende básicamente del signo del coeficiente lineal en el polinomio característico.

En lo que sigue, se muestra que existe un punto singular  $k_0 > \lambda$ , para el cual se cumple que el coeficiente de  $\mu$  en (2.8) es positivo, si y sólo si  $k > k_0$ . Así que el origen es asintóticamente estable para  $\lambda < k < k_0$ , e inestable si  $k > k_0$ . La atractividad global se sigue de Hsu [1978a] y Wilken [1982];  $k_0$  es independiente de  $cc$ ; por lo tanto, toda superficie de la familia (2.3) bifurca en el mismo punto  $k_0$ , en particular los planos coordenados  $x_i = 0, i = 1, 2$ . A continuación se halla el valor de bifurcación  $k_0$  para el modelo propuesto.

El siguiente argumento muestra la existencia y unicidad de  $k_0$  para las funciones propuestas,  $g(s, k)$  y  $p(s, a)$  en el modelo:

Sea la función  $b(k)$  la cual define el coeficiente de  $\mu$  en el polinomio característico como una función de  $k$ , es decir:

$$b(k) = -\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda g_s(\lambda, k) + \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)}, \quad (2.9)$$

se ve en primer lugar que  $b(k)$  es una función estrictamente decreciente, en efecto:

$$b_k(k) = -\gamma g_k(k) - \gamma \lambda g_{sk}(k) + \frac{\gamma \lambda g_k(k) p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)}.$$

Agrupando términos:

$$b_k(k) = -\gamma g_k(k) \left( -1 + \frac{\lambda p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \right) - \gamma \lambda g_{sk}(k).$$

Como  $g_k(\lambda, k) > 0$ , ya que  $g_k(\lambda, k)$  es igual a

$$g_k(\lambda, k) = \frac{\left( \frac{s}{k} \right)^m \left( (-1 + e^k)m + e^k k u \right)}{(-1 + e^k)k} > 0, \quad (2.10)$$

el signo de  $b_k(k)$  depende básicamente del signo del término  $\left( -1 + \frac{\lambda p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \right)$ , ya que por la condición

$$(1.4) \quad \gamma \lambda g_{sk}(\lambda, k) > 0; \text{ pero } \left( -1 + \frac{\lambda p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \right) < 0,$$

por la condición (1.7) para  $p$ ; por lo tanto, se puede concluir que:

$$b_k(k) < 0. \quad (2.11)$$

Adicionalmente a la desigualdad anterior, se muestra que  $b(k)$  cambia de signo por la condición (1.4) y (1.6) para la función  $g$ . Se tiene en primer lugar que  $b(\lambda) > 0$ :

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= -\gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda g_s(\lambda, k) + \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \\ &= \gamma \lambda g_s(\lambda, k) > 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En segundo lugar, aplicando la condición (1.5) conjuntamente con la propiedad antes mencionada para  $g$  que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(s, k) = 1$  y la condición (1.9) para  $p$  y (1.5) para  $g$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} b(k) &= -\gamma \lim_{k \rightarrow \infty} g(\lambda, k) - \gamma \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} g_s(\lambda, k) + \frac{\gamma \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} g(\lambda, k) p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \\ &= \gamma \left( -1 + \frac{\gamma \lambda p_s(\lambda, a)}{p(\lambda, a)} \right) < -\gamma + \gamma \frac{\lambda}{\lambda} = 0, \\ \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} b(k) &< 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

De la condición (2.11), (2.12) y (2.13) se deduce la existencia y unicidad del  $k_0$  que satisface las condiciones del teorema 2.1.1. A continuación se verifican las condiciones del teorema Andronov-Hopf [1942] para la existencia de la bifurcación de Hopf. Sobre la linealización del sistema (2.4) en  $P(0, 0)$ , los valores propios  $u_{1,2}(k_0)$  llegan a ser de la forma:

$$u_{1,2} = \alpha(k) \pm i\beta(k)$$

$$\alpha(k) = \frac{-\gamma}{2p(\lambda, a)} \left( (-\lambda g_s(\lambda, k) p(\lambda, a) + g(\lambda, k) (\lambda p_s(\lambda, a) - p(\lambda, a))) \right)$$

$$\beta(k) = \frac{1}{2p(\lambda, a)} \left( \frac{4\gamma\lambda g(\lambda, k) p^2(\lambda, a) p_s(\lambda, a)}{-\gamma^2 (-\lambda g_s(\lambda, k) p(\lambda, a) + g(\lambda, k) (\lambda p_s(\lambda, a) - p(\lambda, a)))} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Claramente de las propiedades (1.4), (1.7) de  $g$ , y (1.8) de  $p$ , se tiene que  $\lambda < k < k_0$ . En  $k_0$ , se satisface las ecuaciones

$$b(k_0) = 0, \alpha(k_0) = \frac{-\gamma b(k_0)}{2p(\lambda, a)};$$

por lo tanto se tiene que:

$$\alpha(k_0) = 0. \tag{2.14}$$

Además  $\beta(k_0)$  se puede escribir como:

$$\beta(k_0) = \frac{1}{2p(\lambda, a)} \left( \frac{4\gamma\lambda g(\lambda, k) p^2(\lambda, a) p_s(\lambda, a)}{-\gamma^2 (b(k_0))^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.15}$$

sustituyendo el valor de  $b(k_0) = 0$  en la expresión anterior se tiene:

$$\beta(k_0) = (\gamma\lambda g(\lambda, k_0) p_s(\lambda, a))^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{2.16}$$

Por otro lado la condición  $\alpha(k_0) = 0$  implica que:

$$\lambda p_s(\lambda, a) - p(\lambda, a) = \frac{-\lambda g_s(\lambda, k_0) p(\lambda, a)}{2g(\lambda, k_0)}. \tag{2.17}$$

Diferenciando  $\alpha(k)$  queda:

$$\alpha'_k = \alpha(k) = \frac{1}{2p(\lambda, a)} \left( \frac{(\lambda g_s(\lambda, k) p(\lambda, a) + \gamma\lambda g_s(\lambda, k) p_s(\lambda, a))}{-\gamma\lambda g_{sk}(\lambda, k) p(\lambda, a)} \right),$$

factorizando algunos términos de la expresión anterior se obtiene:

$$\alpha'_k = \frac{1}{2p(\lambda, a)} \left( \frac{(-\gamma g_s(\lambda, k) (-p(\lambda, a) + \lambda p_s(\lambda, a)))}{+\gamma\lambda g_{sk}(\lambda, k) p(\lambda, a)} \right),$$

sustituyendo la expresión (2.17) en la igualdad anterior:

$$\alpha'_k(k_0) = \frac{1}{2p(\lambda, a)} \left( \frac{(-\gamma\lambda g_s(\lambda, k) \frac{\lambda g_s(\lambda, k) p(\lambda, a)}{g(\lambda, k)})}{+\gamma\lambda g_{sk}(\lambda, k) p(\lambda, a)} \right) > 0. \tag{2.18}$$

Las condiciones (1.4), (1.5) y (2.10) implican que  $\alpha_k(k_0)$  es mayor que cero; así, las condiciones (2.14), (2.16) y (2.18) del teorema de bifurcación de Andronov Hopf se cumplen según Hassard [1981].

Se puede obtener  $k_0$  explícitamente, lo cual resulta de resolver la siguiente ecuación algebraica:

$$b(k) = -1 + \left( \frac{\lambda}{k} \right)^m (\lambda + 1)$$

$$+ \frac{\lambda \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{k} \right)^m \right) \left( \frac{An\lambda^{n-1}}{a^r B + D} + \frac{cqa^{v+1}}{(a^v F + 1)(a + q\lambda)^2} \right)}{\frac{A\lambda^n}{a^r B + D} + \frac{cq\lambda}{(a^v F)(a + q\lambda)}} = 0.$$

La ecuación anterior es una ecuación resoluble por radicales en la variable  $k_0$ . Resolviendo ésta para  $k_0$ , se tiene finalmente la expresión (2.6) del teorema 2.1.1. La existencia y unicidad del valor  $k_0$  para los valores de los parámetros del modelo ya ha sido probada por lo tanto no se hace necesario constatar el signo de la expresión dentro del radical, ya que éste es siempre positivo y se termina la prueba **W**.

La expresión para el valor de bifurcación  $k_0 = a + 2\lambda$  obtenida por Farkas [1984a] resulta ser un caso particular de la expresión (2.6) bajo los siguientes valores de los parámetros del modelo:

$$a > 0, A = 0, C = 1, B > 0, q = 1$$

$$F = 0, 0 \leq n \leq 1, v = 0, m = 1.$$

### 3. CONCLUSIÓN GENERAL

Se ha generalizado el modelo tratado varios autores [Hubbel y Walman 1978 a,b; Koch, 1974 a,b] y Farkas [1984] y obtenido una expresión explícita de los puntos de bifurcación que extiende la obtenida de  $k_0 = a + 2\lambda$ , en la literatura por los autores antes mencionados.

**4. AGRADECIMIENTOS:** Agradecimiento al Profesor Miklós Farkas por su amable y acertada orientación en esta investigación

### 5. BIBLIOGRAFÍA

[1] KOCH A. Coexistence resulting from an alteration of density dependent and density independent growth. J. theoret. Biol. 44: 373-386. 1974a.

[2] SMITH, H. L. The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two predator-one prey competition model, SIAM J. appl. Math. 42: 27-43. 1982.

[3] WILKEN D. R. Some remarks on a competing predators problem, SIAM J. appl. Math. 42: 895-902. 1982.

[4] ESCOBAR, C. Modelo original de tipo exponencial algebraico que exhibe la bifurcación zip. Tesis Mg. Universidad de Antioquia, 2003.

[5] BUTLER, G. J. Competitive predator-prey systems and coexistence, in population Biology Proceedings, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics. 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[6] FARKAS, M. A zip bifurcation arising in population dynamics, in 10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscilations, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.

[7] HASSARD B. D.; KAZARINOFF, N. D. and WAN, Y. H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge University Prerss, 1981.