

Las situaciones de transformación y el conocimiento de la enseñanza de los docentes de matemáticas al utilizar tecnologías de la información y la comunicación

The transformation situations and the knowledge of the teaching of mathematics teachers when using information and communication technologies

J. F. Amador-Montaña  ; J. Deulofeu-Piquet 
DOI: <https://doi.org/10.22517/23447214.24877>
Artículo de investigación científica y tecnológica

Abstract— Understanding how the teacher mobilizes mathematical and technological knowledge to teach requires studying the practice of teachers of mathematics when they use Information and Communications Technology (ICT) in the classroom. This article presents a way of approaching the investigation to deepen the Technological Pedagogical and Content Knowledge (TPACK) of mathematics teachers. To do this, teachers were invited graduated from the Master's Degree in Mathematics Teaching from the Technological University of Pereira. They work in public schools in Municipalities of the departments of Risaralda and Quindío. As a first approach, an interview is carried out that allows you to recognize your beliefs and knowledge about the subject through the planning of your classes with the use of digital resources. Secondly, two classes are observed in the classroom, in which topics such as the straight line, the linear function, systems of linear equations, problem solving, trigonometric functions, real functions and the limit of a function are developed. With the use of digital tools such as: GeoGebra, spreadsheet, videos, slide presenters and an online platform. Activities saved on video recordings. This information is treated with theories that allow to analyze educational practices through transformation situations, instrumented activities, and the mathematical and technological knowledge to teach. Methodologically, the case study is addressed to delve into the relationships of mathematical and technological knowledge to teach mathematics. In addition, there are own strategies developed to classify transformation situations in which there are instrumented teaching activities. With these references, situations of transformation in the mathematical and technological knowledge of mathematics teaching are analyzed and understood.

Index Terms— Math education, math teaching, teaching practices, mathematical and technological to teach, TPACK.

Resumen— Comprender cómo el docente moviliza conocimiento matemático y tecnológico para enseñar exige estudiar la práctica de los profesores de matemáticas cuando utilizan Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el aula de clases. Este artículo presenta una manera de cómo abordar la investigación para profundizar en el conocimiento tecnológico didáctico del contenido (TPACK) de docentes de matemáticas. Para ello, se invita a docentes egresados de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira. Todos ellos trabajan en colegios públicos en Municipios de los departamentos de Risaralda y Quindío. Como primer acercamiento, se adelanta una entrevista que permite reconocer sus creencias y conocimientos acerca del tema a través de la planeación de sus clases con uso de recursos digitales. En segunda instancia se observan en el aula, dos clases, en las que se desarrollan temas como la línea recta, la función lineal, sistemas de ecuaciones lineales, solución de problemas, funciones trigonométricas, funciones reales y límite de una función. Con uso de herramientas digitales tales como: GeoGebra, hoja de cálculo, videos, presentadores de diapositivas y una plataforma en línea. Actividad que se registra en videgrabaciones. Esta información es tratada con teorías que permiten analizar las prácticas educativas a través de situaciones de transformación, de actividades instrumentadas, y del conocimiento matemático y tecnológico para enseñar. Metodológicamente, se aborda el estudio de casos para profundizar en las relaciones del conocimiento matemático y tecnológico para enseñar matemáticas. Además, se desarrollan estrategias propias para clasificar situaciones de transformación en las que hay actividades de enseñanza instrumentadas. Con estos referentes se analiza y comprende situaciones de transformación en el conocimiento matemático y tecnológico de la enseñanza de las matemáticas.

Este manuscrito fue enviado el 08 de junio de 2020 y aceptado 23 de diciembre 2021.

J. F. Amador-Montaña, Profesor Titular del programa de Licenciatura en Tecnología en el área de Informática Educativa de la Universidad Tecnológica de Pereira desde el año 2006. (jamador@utp.edu.co).

J. Deulofeu-Piquet, Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la UAB desde 1978. Director del Máster de Secundaria de Matemáticas. (jordi.deulofeu@uab.cat).



Palabras clave— conocimiento matemático para enseñar, enseñanza de la matemática, prácticas de enseñanza de la matemática, TPACK.

I. INTRODUCCIÓN

La investigación que se presenta en este artículo pretende mostrar cómo el conocimiento matemático y tecnológico movilizado en la enseñanza de las matemáticas incide en el conocimiento matemático a enseñar. Esta actividad exige de un conocimiento base que está directamente relacionado con el manejo de ideas en el aula, para que a través de preguntas el estudiante logre el control del conocimiento que construye, de tal manera que esta acción libere el andamiaje [1]. De otro lado, el docente debe distinguir los diferentes niveles de comprensión de sus estudiantes y proponer actividades basadas en tecnologías como el computador, el software, la simulación o el trabajo en grupo atendiendo los diferentes estilos de aprendizaje de los alumnos con el fin de procurar el desarrollo de habilidades y destrezas [2].

El interés investigativo en el conocimiento matemático para enseñar, de un profesor de matemáticas exige de herramientas teóricas que permitan su observación y respectivo análisis. En esta construcción conceptual el artículo contempla [3], que el conocimiento didáctico del contenido de un profesor de matemáticas se aborda desde tres características, fundamentadas en Shulman: 1) el conocimiento del contenido de la disciplina a enseñar, 2) el conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico) y 3) el conocimiento del estudiante.

Para la observancia del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) del docente de matemáticas, en ejercicio, que trabaja con herramientas informáticas, la investigación tiene en cuenta a Mason y Spence [4], al asegurar que "el conocimiento sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas solo se realiza como conocimiento en el acto de enseñar". Otro referente, corresponde al Knowledge Quartet (KQ) [5], que está demarcado por 4 categorías o dimensiones (Fundamentación, transformación, conexión y contingencia), cada una identificada a través de códigos contributivos. De estas cuatro dimensiones, 3 de ellas (transformación, conexión y contingencia) son descripciones de situaciones que pueden presentarse en el desarrollo de una clase de matemáticas [6].

Las transformaciones son el centro de esta investigación, dado que esta categoría se refiere al conocimiento en acción del docente. Que se observa en la planeación y en el acto de enseñar en sí mismo. Corresponde con lo que Shulman trata sobre la clave para distinguir la base de conocimientos de la enseñanza "...radica en la intersección del contenido y la pedagogía, en la capacidad del maestro de transformar el conocimiento del contenido que posee en formas que son pedagógicamente poderosas y, sin embargo, son adaptables a las variaciones en la capacidad y en los antecedentes presentados por los estudiantes" (1987, p. 15). Está categoría, situaciones de transformación, corresponde a la presentación de ideas a los alumnos por medio de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Está constituida por cuatro códigos contributivos: Elección y Uso de Ejemplos (EUE); Elección y uso de Representaciones (ER); ejemplificación de

procedimientos (para explicar un procedimiento) (EP); y Uso de Materiales Educativos (UME)(instruccional) [5].

También, para analizar en profundidad el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), la investigación tiene en cuenta los subdominios: Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS); y Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) [7]. Además, se considera la relación entre los marcos teóricos de Rowland y Ball con el fin de analizar el conocimiento matemático para enseñar en situaciones de transformación.

Otro aporte teórico de esta investigación es el modelo TPACK, que se ha convertido en un referente necesario, para observar e investigar la práctica docente cuando hay mediaciones tecnológicas, y trata sobre las relaciones que se dan entre el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK), el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y el Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK) en procesos de integración tecnológica abordados por el docente para la enseñanza, buscando su eficiencia [8]. Como este conocimiento hace parte de la práctica de los docentes, se encuentra la propuesta de cinco niveles del TPACK [9] y los dos enfoques para identificar el conocimiento TPACK y la competencia TPACK de los docentes [10], aspectos que se relacionan con las situaciones de transformación y serán de utilidad en el análisis.

Al introducir las TIC, el docente debe desarrollar habilidades para su uso y manipulación, debe enfrentarse a la triada currículo, didáctica y tecnología; teniendo la oportunidad de representar el conocimiento de maneras diferentes, de brindar visiones y perspectivas del conocimiento ya que la diversidad de tecnologías lleva a nuevos tipos de actividades. La tecnología cambia el comportamiento de los docentes y de los estudiantes. Para enfrentar el uso de ésta en procesos de enseñanza de las matemáticas, la investigación configura las actividades con instrumentos [11], atendiendo las interacciones entre el sujeto y el instrumento, y las del sujeto-objeto mediadas por el instrumento. En esta línea [12], el concepto de génesis instrumental que se reconoce a través de la instrumentalización e instrumentación. La primera relativa al objeto y la segunda al sujeto. Para finalizar, acude al concepto de orquestación instrumental [13], que es la organización y uso (sistemático e intencional) que da el profesor, a los artefactos digitales disponibles en un entorno de aprendizaje computarizado, en una situación de tarea matemática específica, para respaldar la génesis instrumental de sus alumnos [12].

II. METODOLOGÍA

Para comenzar se presentan los objetivos general y específicos de esta investigación.

Objetivo general

Comprender en las situaciones de transformación, cuando el profesor utiliza tecnologías de la información y la comunicación (TIC), la incidencia en el conocimiento matemático para enseñar.

Objetivos específicos

Identificar situaciones de transformación que se presentan en el aula de clase cuando el profesor enseña matemáticas con uso de TIC.

Relacionar las situaciones de transformación con uso de TIC con el conocimiento matemático para enseñar.

Valorar la incidencia de estas transformaciones con uso de TIC en el conocimiento matemático para enseñar.

Esta investigación utiliza el estudio colectivo de casos [14], y tiene como método la interpretación del análisis sobre la práctica de enseñar matemáticas con uso de las TIC. Específicamente, situaciones de la práctica que se configuran como situaciones de transformación en el sentido de Rowland. Estas situaciones son episodios de la práctica observada, que permiten validar, comparar y comprender las creencias y conocimientos del docente acerca del saber matemático y tecnológico para enseñar matemáticas. Tales episodios están determinados por los códigos contributivos de esta categoría de análisis (Elección y Uso de ejemplos, Uso de representaciones, Uso de Procedimientos y Uso de Material Educativo). Los episodios de enseñanza con TIC digitales se caracterizan por ser situaciones de transformación y constituir momentos de orquestación instrumental [12]. Por eso, los episodios son los casos en esta investigación.

Esta metodología se desarrolla en 5 etapas, con 6 docentes de matemáticas que trabajan en colegios públicos de los departamentos de Risaralda y Quindío, egresados de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira. Primera etapa: entrevista donde se reconocen las creencias y conocimientos matemáticos de los docentes para enseñar con uso de las TIC. Segunda etapa: observación no participante videograbada. Tercera etapa: planificación de una clase de matemáticas con uso de las TIC. Cuarta etapa: observación no participante de la clase, registrada en video. Quinta etapa: entrevista sobre la experiencia de haber utilizado TIC para enseñar el contenido matemático elegido.

TABLA I
OBSERVACIÓN 1

Grado	Contenido	TIC
9	Ecuación de la recta	Diapositivas GeoGebra Videos
10	Traslación de la función Seno Solución de problemas con razones trigonométricas	GeoGebra
11	Dominio y rango de una función real	

TABLA II
OBSERVACIÓN 2

Grado	Contenido	TIC
9	Sistema de ecuaciones lineales 2X2	Excel Videos
		Excel
10	Solución de problemas de la ecuación de la recta Solución de problemas de la función seno	GeoGebra
	Traslación de la función Seno	CloudLab
11	Límite de una función	GeoGebra

El interés de la investigación es observar y analizar los momentos de la práctica docente del profesor de matemáticas que sean situaciones de transformación [5]. Para ello, de ahora

en adelante, se llamará episodio, al intervalo de tiempo de la clase de matemáticas, cuando el (la) docente desarrolla un contenido específico con uso del computador. Así, un episodio tiene:

Inicio: Cuando el (la) docente comienza a explicar un contenido con uso del computador

Cierre: Cuando el (la) docente termina la explicación del contenido y pasa a realizar otra actividad.

De otro lado, el desarrollo del contenido es visto como un proceso de explicación donde el (la) docente hace uso de su conocimiento matemático para enseñar [7].

De aquí en adelante, se presentan las estrategias abordadas para organizar la información recolectada en las cinco etapas descritas anteriormente.

A. Primera estrategia de categorización de episodios por observación

Esta estrategia identifica las situaciones de transformación que se presentan en el aula de clase cuando el profesor enseña matemáticas con uso de TIC. Para ello, fueron creadas dos herramientas por docente. Una institucional y otra para la primera clasificación de episodios de las dos observaciones. Ambas pueden observarse en las tablas I, III, III, IV y V:

Identificación institucional

TABLA III
INSTITUCIONAL

Profesora:	Grado: 11°
Institución educativa:	Municipio: Pereira

TABLA IV
EPISODIOS DE LA OBSERVACIÓN 1

Contenido	Dominio y rango de una función		
Recursos utilizados	GeoGebra		
	PowerPoint		
Episodio	Video proyector		
	Tablero		
	Computador		
	Intervalo		Código
1	6:00 - 7:50	EUE	
2	7:50 - 10:22	EUE	
3	10:29 - 14:29	EUE	
4	14:30 - 16:37	EUE	
5	17:08 - 23:30	UME	
6	23:44 - 24:52	EP	
7	24:54 - 26:11	EP	
8	26:12 - 29:06	EP	
9	29:14 - 31:24	EP	
10	42:03 - 42:26	EP	
11	47:12 - 50:44	EP	
12	51:37 - 52:08	EUE	
13	1:02:48 - 1:03:07	ER	
14	1:03:13 - 1:03:28	ER	
15	1:03:46 - 1:05:24	ER	
16	1:06:25 - 1:07:07	ER	

TABLA V
EPISODIOS DE LA OBSERVACIÓN 2

Introducción al concepto de Límite		
GeoGebra		
Video proyector		
Tablero		
Computador		
Episodio	Intervalo	Código

1	9:19 - 9:25	EUE
2	12:01 - 13:10	EUE
3	14:05 - 16:17	EUE
4	18:13 - 18:33	EUE
5	20:13 - 21:43	EP
6	25:16 - 26:46	EP
7	28:20 - 29:50	EP
8	29:50 - 30:39	EP
9	38:12 - 38:47	EP
10	39:40 - 40:00	EP
11	50:58 - 55:17	ER
12	56:47 - 58:35	ER
13	1:00:02 - 1:10:15	EUE

Con estas tres tablas están identificadas las situaciones de transformación, es decir, los episodios que se dieron en el aula con uso de las TIC a la hora de enseñar matemáticas, en las dos observaciones. Cada episodio está descrito y justificado a través de su código contributivo con una cuantificación como se muestra en la tabla VI y la Fig. 1 donde se observan tendencias:

TABLA VI
EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN DE CÓDIGOS CONTRIBUTIVOS X DOCENTE

Códigos contributivos	Ocurrencias		
Explicación de procedimientos	EP	12	41%
Uso de material educativo	UME	1	3%
Elección y uso de ejemplos	EUE	10	34%
Elección de representaciones	ER	6	21%
		29	100%

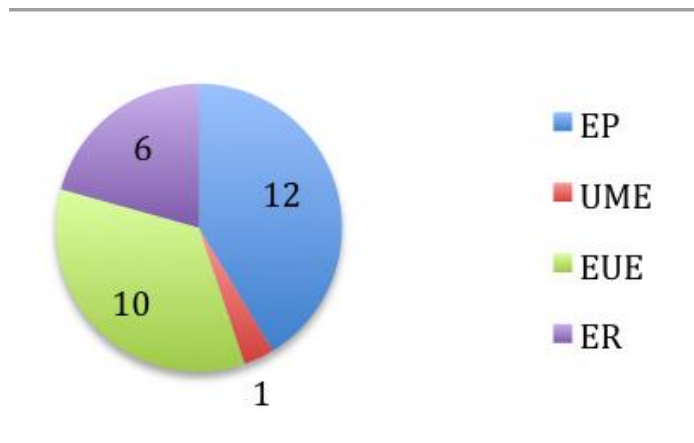


Fig. 1. Códigos contributivos por docente

B. Segunda estrategia de categorización de episodios

La primera estrategia determina 111 episodios. Ésta, determina y describe los totales de los episodios por código contributivo (tabla VII) donde se observa, que la mayor parte (44%) de los episodios están configurados en EUE, que se encuentran en variedad de actividades en el aula de clase. En la Fig. 2, se ven estas relaciones entre los códigos contributivos.

TABLA VII
CUANTIFICACIÓN DE CÓDIGOS CONTRIBUTIVOS DE TODOS LOS DOCENTES

Códigos contributivos	Totales		
Explicación de procedimientos	EP	17	15%
Uso de material educativo	UME	32	29%
Elección y uso de ejemplos	EUE	49	44%
Elección de representaciones	ER	13	12%
		111	100%

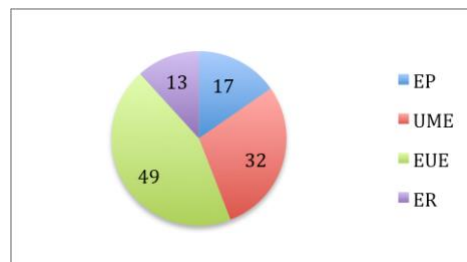


Fig. 2. Códigos contributivos - Totales

Esta valoración cualitativa de las ocurrencias de 111 episodios ofrece una tendencia marcada por EUE.

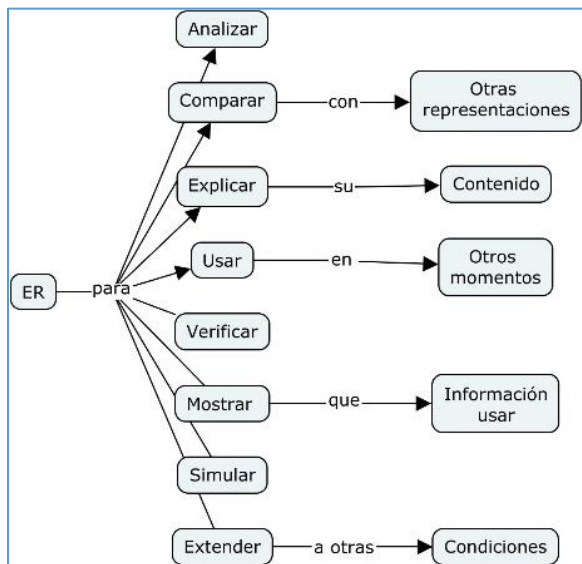
C. Tercera estrategia de categorización de episodios

Ésta describe cada episodio e identifica las acciones de enseñanza de matemáticas con uso de TIC en el aula de clase. Además, confirma su pertinencia como situación de transformación y riqueza informativa que indica cómo estas transformaciones con uso de TIC inciden en el conocimiento para enseñar matemáticas. En la Tabla VIII se presenta a modo de ejemplo:

TABLA VIII
DESCRIPCIÓN E IDENTIFICACIÓN DE ACCIONES

Episodio	Código	Comentario
6:00 - 7:50	EUE	Función Lineal $f(x) = 2x - 1$. La profesora informa que primero deben graficar las funciones con GeoGebra, luego encontrar el dominio y el rango de ellas. Mostrando con la herramienta la variación de los valores en el eje X y en el eje Y
7:50 - 10:22	EUE	Función cuadrática $h(x) = 3x^2 - 6x + 1$. La docente interroga por los valores del dominio y el rango de la función. Allí, explica qué es el dominio y rango de la función.
14:30 - 16:37	EUE	Función radical. $J(x) = \text{raíz}(x+4)$. La profesora discute sobre los valores que puede tomar x en esta función. Para ir orientando la búsqueda de su dominio y rango.
17:08 - 23:30	UME	Los estudiantes copian en sus cuadernos las definiciones de dominio y rango que la docente exhibe en el tablero a través de dos diapositivas.

D. *Cuarta estrategia de categorización de episodios* Corresponde a la creación de cuatro mapas conceptuales, con las actividades de enseñanza de las matemáticas con uso de TIC encontradas en las descripciones de todos los episodios por código contributivo. Esto tiene como fin hacer más precisa la selección y clasificación de episodios, para asegurar que éstos al final serán los que permitan hacer el análisis y



comprender cómo las situaciones de transformación donde haya uso de las TIC inciden en el conocimiento para enseñar matemáticas.

Fig. 3. Elección y Uso de Ejemplos (EUE) [15]

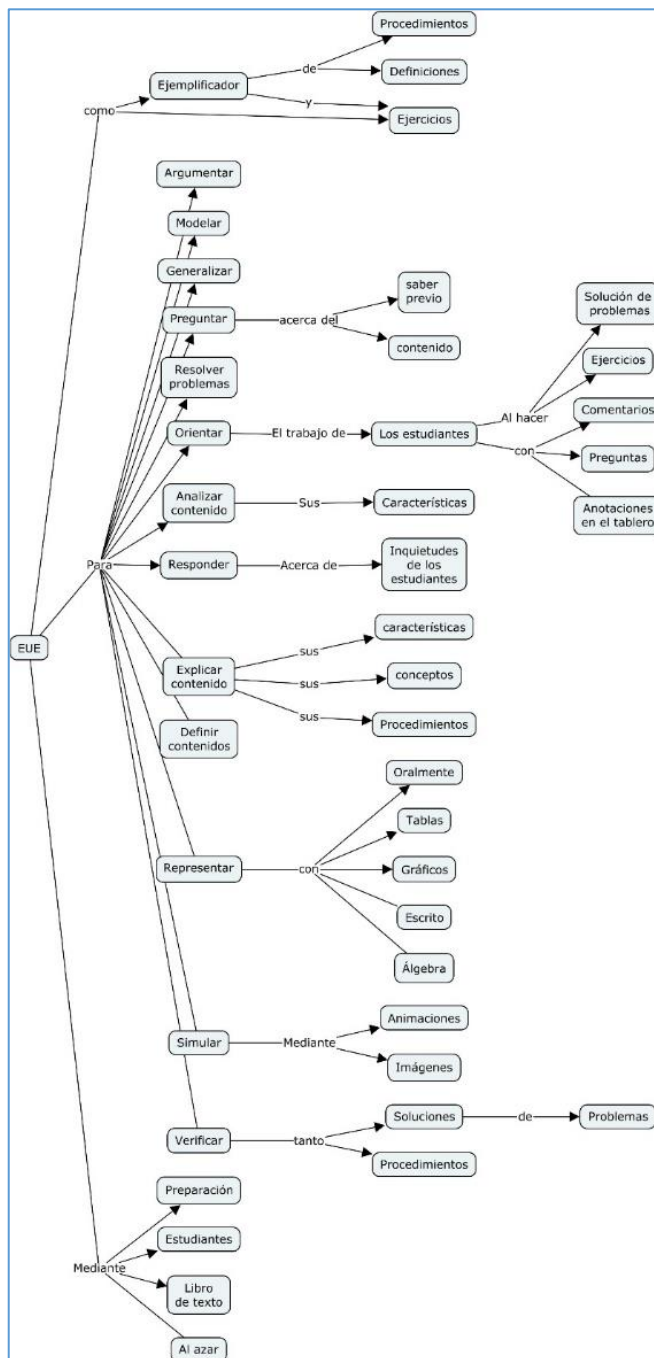


Fig. 4. Elección de Representaciones (ER) [15]

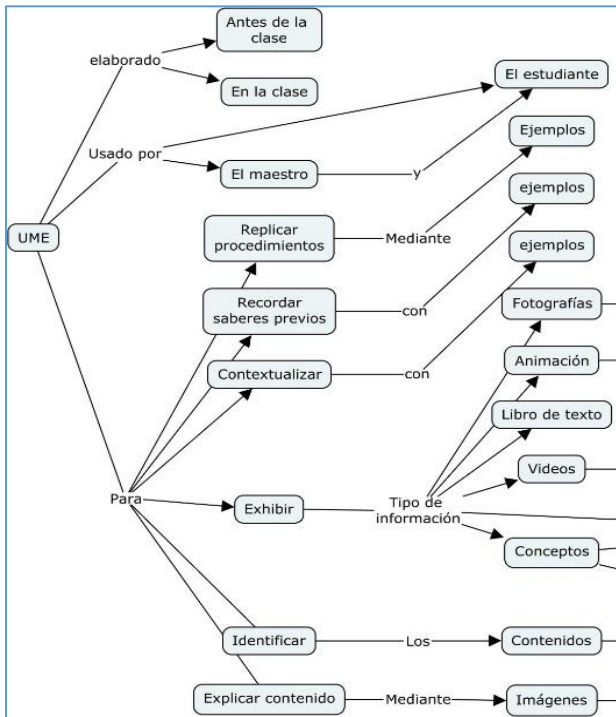


Fig. 5. Uso de Material Educativo (UME) [15]

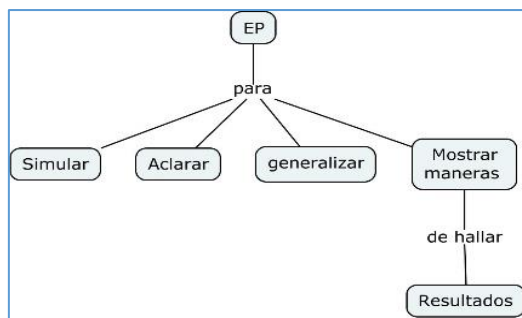


Fig. 6. Explicación de Procedimientos (EP) [15]

En estos mapas conceptuales (ver Fig. 3, 4, 5 y 6) se evidencian relaciones en los episodios a través de actividades para enseñar matemáticas con uso de TIC (llamadas, también, actividades instrumentadas)

E. Quinta estrategia de categorización de episodios

A partir de los mapas conceptuales (3, 4, 5 y 6) de las actividades instrumentadas (Rabardel, 2011) en los episodios [5], se relacionan por código contributivo como muestra la tabla IX.

TABLA IX
CATEGORIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES INSTRUMENTADAS

		Episodios	
ER	EP	EUE	UME
		Resolver problemas	Contextualizar
Extender		Argumentar	
	Aclarar	Definir	Identificar
		Representar	Recordar
Usar		Orientar	Replicar procedimientos
		Modelar	
Comparar		Responder	
		Preguntar	
Verificar		Verificar	
Mostrar	Mostrar maneras		Exhibir
	Generalizar	Generalizar	
Simular	Simular	Simular	
Explicar		Explicar	Explicar
Analizar		Analizar	
8	4	13	6

Con la información de la tabla VII se sabe qué acciones en los episodios los caracterizan y qué acciones comparten en la práctica. Por eso, aquellos episodios que tengan relación a través de las acciones son llamados episodios compuestos y los que no episodios simples. Esta relación de acciones, será usada para abordar las interpretaciones de cómo las actividades instrumentadas en situaciones de transformación inciden en el conocimiento para enseñar matemáticas.

De la tabla VII, se desprende la Fig. 7, en el que se observan las relaciones entre las actividades instrumentadas con respecto a las situaciones de transformación. Los anuncios de la numeración (Compuesto – Simple, Total) indica la cantidad de actividades que comparten las diferentes transformaciones, y las que le son propias. Total, indica la cantidad total de actividades instrumentadas en cada situación de transformación.

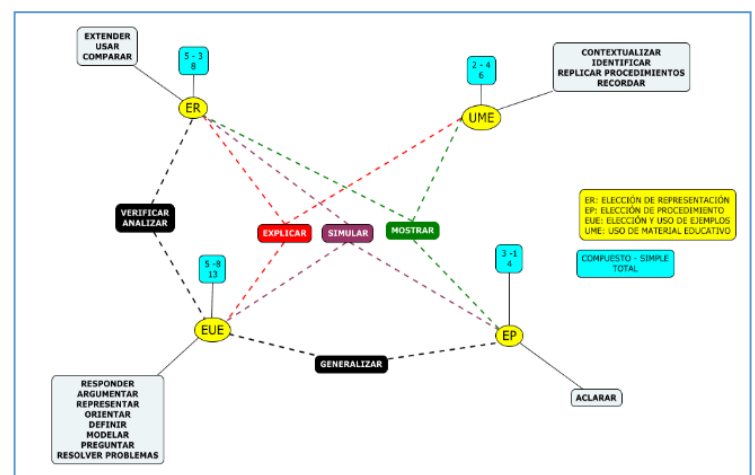


Fig. 7. Tipos de episodios [15]

De la Fig. 7, surge su correspondiente diagrama de Venn, Fig. 8.

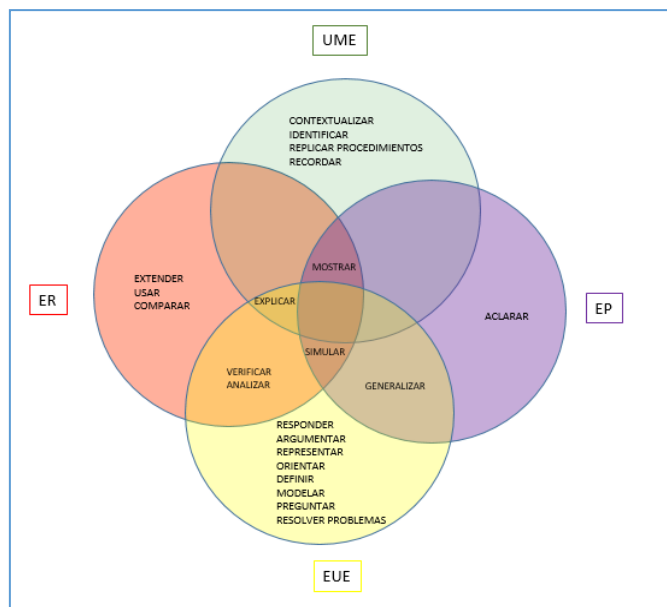


Fig. 8. diagrama de Venn.

A partir, de la Fig. 8, quedan determinados 16 episodios simples que corresponden con las actividades instrumentadas no compartidas con otras situaciones de transformación, así:

$$ER = \{\text{Extender, Usar, Comparar}\} \rightarrow 3$$

Fig. 8. Relaciones de pertenencia de las actividades instrumentadas [15]

$$EP = \{\text{Aclarar}\} \rightarrow 1$$

$$EUE = \{\text{Responder, Argumentar, Representar, Orientar, Definir, Modelar, Preguntar, Resolver problemas}\} \rightarrow 8$$

$$UME = \{\text{Contextualizar, Identificar, Replicar procedimientos, Recordar}\} \rightarrow 4$$

De otro lado, quedan determinamos 6 episodios compuestos que corresponden a las actividades instrumentadas que comparten dos o más tipos de situaciones de transformación, así:

$$EUE \cap EP = \{\text{Generalizar}\} \rightarrow 1$$

$$ER \cap EUE = \{\text{Verificar, Analizar}\} \rightarrow 2$$

$$ER \cap EUE \cap EP = \{\text{Simular}\} \rightarrow 1$$

$$UME \cap ER \cap EUE = \{\text{Explicar}\} \rightarrow 1$$

$$ER \cap UME \cap EP = \{\text{Mostrar}\} \rightarrow 1$$

Con esta clasificación de episodios se determinan 16 simples de los 111 encontrados, a partir de sus actividades instrumentadas. Estos son los episodios que constituyen los casos a analizar.

Para finalizar, se encuentra una manera de nombrar los episodios

Situación (es) de transformación (ST) + Contenido (C) + Actividad instrumentada (A)+ Recurso (TIC)

Así, por ejemplo, un episodio que corresponda a una situación de transformación de Elección y uso de Ejemplos (EUE), donde se enseña solución de ecuaciones lineales,

mediante una actividad instrumentada (Presentar) con uso de Excel, es nombrada así:

EUE + Solución de ecuaciones lineales + Presentar + Excel

La tabla X corresponde a los episodios simples, que de ahora en adelante se llamarán episodios, por ser aquellos los casos de esta investigación.

TABLA X
ACCIONES INSTRUMENTADAS

No	Episodios
1	ER + C + Extender + TIC
2	ER + C + Usar + TIC
3	ER + C + Comparar + TIC
4	EP + C + Aclarar + TIC
5	EUE + C + Responder + TIC
6	EUE + C + Argumentar + TIC
7	EUE + C + Representar + TIC
8	EUE + C + Orientar + TIC
9	EUE + C + Definir + TIC
10	EUE + C + Modelar + TIC
11	EUE + C + Preguntar + TIC
12	EUE + C + Resolver problemas + TIC
13	UME + C + Contextualizar + TIC
14	UME + C + Identificar + TIC
15	UME + C + Replicar procedimientos+ TIC
16	UME + C + Recordar + TIC

En la TABLA XI están los episodios a analizar, que son los casos de mayor importancia de esta investigación, con sus situaciones de transformación, contenido a enseñar, acción instrumentada y recurso TIC:

TABLA XI
EPISODIOS

No	Episodios
1	ER + Dominio y rango de una función racional con numerador una función radical y denominador una función lineal + Extender + GeoGebra
2	ER + Solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 + Usar + Excel
3	ER + Cálculo del determinante de una matriz de 2x2 + Comparar + Excel
4	EP + Solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 + Aclarar + Excel
5	EUE + La función racional + Responder + GeoGebra
6	EUE + Ecuación de la recta + Argumentar + Video
7	EUE + Traslación y amplitud de la función Seno + Representar + GeoGebra
8	EUE + Gráfica de la función lineal + Orientar + GeoGebra
9	EUE + Traslación de la función vertical seno + Definir + GeoGebra
10	EUE + Ángulo de elevación y de depresión + Modelar + GeoGebra
11	EUE + Dominio y rango de una función + Preguntar + GeoGebra
12	EUE + Altura de un triángulo rectángulo con uso de funciones trigonométricas+ Resolver problemas + GeoGebra
13	UME + Línea recta + Contextualizar + Video
14	UME + Ángulo de elevación y ángulo de depresión + Identificar + GeoGebra
15	UME + Pendiente de una recta + Replicar procedimientos+ Diapositiva
16	UME + Función seno + Recordar + GeoGebra

Con estas estrategias se logra el objetivo No 1 de esta investigación, que corresponde con Identificar situaciones de transformación que se presentan en el aula de clase cuando el profesor enseña matemáticas con uso de TIC a partir de ejemplos, explicaciones, representaciones y material educativo, además, se cualifican los 111 casos en 16.

III. RESULTADOS

A. Etapas y estrategias

La investigación encuentra en sus etapas iniciales que la mayor parte de los docentes utilizan como recurso tecnológico para enseñar matemáticas la herramienta Geogebra, además, que la situación de transformación que más se lleva a cabo es EUE. De otro lado, esta investigación encuentra un procedimiento, a través de 5 estrategias, para refinar la cantidad de casos (episodios) de 111 a 16, teniendo al final aquellos que son representativos y ofrecen la mayor riqueza informativa en la búsqueda de los propósitos de la misma.

B. Relaciones entre el TPACK y el MKT en las situaciones de transformación

La investigación evidencia acciones con el conocimiento movilizado para enseñar matemáticas en busca del equilibrio dinámico entre los subdominios conocimiento tecnológico (TK), conocimiento tecnológico del contenido (TCK) y conocimiento tecnológico pedagógico (TPK) del TPACK, en las situaciones de transformación de ER con el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), en las situaciones de transformación de elección y EP con el conocimiento con el conocimiento especializado de contenido (SCK), en las situaciones de transformación de EUE con el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) y en las situaciones de transformación de UME con el conocimiento común del contenido (CCK). En la TABLA XII se observan estas relaciones:

TABLA XII
RELACIÓN TPACK Y MKT

		Subdominios de MKT			
		CCK	SCK	KCS	KCT
	TK	UME	EP		ER
			EUE		EUE
Subdominio de TPACK	TPK	UME	EP		ER
			EUE		EUE
	TCK	UME	EP		ER
			EUE		EUE

IV. CONCLUSIONES

El uso de marcos teóricos integrados en este estudio colectivo de casos brinda experiencias investigativas y teóricas que en cada instante exige preguntar por lo que se está encontrando en cada paso. Esto no es fortuito ya que tamizar en situaciones de transformación (KQ) las prácticas de enseñanza de las matemáticas con diferentes docentes, en distintas localidades (en los departamentos de Risaralda y Quindío), con distintos contenidos (Ecuación de la recta, Traslación de la función Seno,

Solución de problemas con razones trigonométricas, Dominio y rango de una función real, Ecuaciones lineales 2X2, Solución de problemas de la ecuación de la recta, Límite de una función) y diferentes recursos tecnológicos (Diapositivas, GeoGebra, Videos, Excel, CloudLab), requiere tomar decisiones que permitan analizar en profundidad aquellas situaciones que sean ricas en información para valorarlas en relación con el conocimiento matemático (MKT) para enseñar y sus subdominios del conocimiento del contenido, para comprender cómo, en contacto con el conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido (TPACK), indiquen en la manera que el docente moviliza conocimiento matemático a la hora de enseñar con uso de tecnologías de la información y la comunicación.

En esta investigación se evidencia que: a) el CCK adquiere dinamismo, entre la representación del conocimiento matemático movilizado por el docente y la representación que le ofrece la herramienta digital, dada su génesis instrumental, es decir, la reflexión que el docente debe hacer a la hora de explicar desde sus representaciones internas con la representación que le ofrece el recurso digital; b) el SCK es apoyado por el conocimiento tecnológico (TK) para generalizar el uso de un procedimiento en matemáticas con lo cual el docente buscar una orquestación instrumental, es decir, ajustar la génesis instrumental de sus estudiantes con la de él; c) que al disponer de un ejemplo con el que se quiere generalizar, encuentra en su conocimiento tecnológico un aliado estratégico con su SCK para hacer eficiente su labor de enseñar, ya que, valida, verifica y promueve en sus estudiantes la experimentación con el conocimiento matemático, como se constata en los episodios del 5 al 12. d) el uso de representaciones con mediación de las TIC aporta al conocimiento de contenido y la enseñanza (KCT) en lo referente a la posibilidad de comunicar el conocimiento matemático en medio de la secuenciación de la clase con varios tipos de representaciones; e) el uso de ejemplos con herramientas digitales aporta a la secuencia de la clase, a la participación, a la incorporación de aportes de los estudiantes, al KCT, y a la reflexión continua de su conocimiento tecnológico (TK) del docente en busca de la cualificación de sus estrategias de enseñanza.

A pesar, de las fronteras borrosas entre los subdominios de estos marcos teóricos, estas brindan la oportunidad de analizar, la práctica de docentes de matemáticas que enseñan haciendo uso de sus conocimientos matemáticos y tecnológicos para enseñar. También permiten reflexionar acerca de estos límites y su utilidad para comprender el conocimiento matemático que construye el docente en el momento que enseña con uso de estas herramientas digitales.

REFERENCIAS

- [1]. J. Bruner, "The role of dialogue in language acquisition". *En J. y. Sinclair, The Child's concept of language*, pp 541-256, New York, Springer-Verlag, 1978.
- [2]. L. Shulman, "Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma". *Revista de currículum y formación del profesorado*, Vol. 9 no. 2 pp. 1-30, 2005 ISSN-e: 1138-414X. <https://recyt.fecyt.es/index.php/profesorado/article/view/42675>
- [3]. J. Pinto., M. González, "El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?". *Educación matemática*, Vol.20, no.3 pp. 83-100, 2008 ISSN 1665-5826.

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000300005&lng=es&nrm=iso

- [4]. J. Mason., M. Spence, "Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment". *Educational Studies in Mathematics* no. 38 pp. 135–161, 1999. DOI: 10.1023/A:1003622804002
- [5]. T. Rowland, "The knowledge quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge". *SISYPHUS Journal of education*, Vol 1 no. 3 pp. 15-43, 2013. ISSN: 2182-9640 DOI: 10.25749/sis.3705
- [6]. T. Weston, "Using the Knowledge Quartet to quantify mathematical knowledge in teaching: the development of a protocol for Initial Teacher Education". *Research in Mathematics Education*, Vol 15 no. 3 pp. 286-302, 2013. DOI: 10.1080/14794802.2013.849865
- [7]. D. Ball, et al, "Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?" *Journal of Teacher Education*, Vol. 59, no. 5 pp. 389–407, 2008. DOI: 10.1177/0022487108324554.
- [8]. M. Koehler., P. Mishra. "What is technological pedagogical content knowledge? Contemporary Issues". *Technology and Teacher Education*, Vol 9, no. 1, pp. 60-70, 2009. <https://citejournal.org/volume-9/issue-1-09/general/what-is-technological-pedagogicalcontent-knowledge>
- [9]. M. Niess, "Transforming Teachers' Knowledge: Learning Trajectories for Advancing Teacher Education for Teaching with Technology". In: *Angeli C., Valanides N. (eds) Technological Pedagogical Content Knowledge*, pp. 19-37, Springer, Boston, MA, 2015.
- [10]. S. Willermark, "Technological Pedagogical and Content Knowledge: A Review of Empirical Studies Published From 2011 to 2016". *Journal of Educational Computing Research*, Vol 56, no.2, pp. 315-343, 2017. DOI: 10.1177/0735633117713114
- [11]. P. Rabardel, "Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos". Traducido al español por M. Acosta, Ediciones Universidad Industrial de Santander. Colombia. 2011.
- [12]. L. Truoche, "Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol 9, no. 3, 281-307, 2004. DOI: 10.1007/s10758-004-3468-5
- [13]. P. Drijvers, et al, "The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom". *Educational Studies in Mathematics*, Vol 75, no. 2, pp. 213-234, 2010. DOI: 10.1007/s10649-010-9254-5
- [14]. R. Stake, Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata, 1999.
- [15]. J. Amador, "Situaciones de transformación en el conocimiento de la enseñanza de los docentes de matemáticas cuando utilizan Tecnologías de la información y la comunicación (TIC)", tesis doctoral, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, 2020.



Jordi Deulofeu-Piquet, licenciado en Matemáticas (U. de Barcelona, 1976) y Doctor en Didáctica de las Matemáticas (U. Autònoma de Barcelona, 1993). Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la UAB desde 1978. Director del Máster de Secundaria de Matemáticas. Investigación en: Competencia matemática, Resolución de problemas y

Estudio de la práctica del profesor de matemáticas.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5834-0863>



José Francisco Amador-Montaño, Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (1988), Especialista en Gerencia y Gestión Cultural de la Universidad del Rosario (1995) Ingeniero de Sistemas de la Universidad EAN (1996), Magíster en Tecnologías de la

Información Aplicadas a la Información (2005), Candidato a Doctor en Didáctica de la Universidad Tecnológica de Pereira. Profesor Titular del programa de Licenciatura en Tecnología en el área de Informática Educativa de la Universidad Tecnológica de Pereira desde el año 2006

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2776-0101>