MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE ACCIONES

Mathematical Modeling the Estimate of Options on Actions

RESUMEN
Se mostrará en este artículo los principios de la modelación matemática en la valuación de opciones sobre acciones, básicamente en lo referente al comportamiento del precio de las acciones. Para comprender mejor el funcionamiento de dichos modelos es necesario ante todo tener cierto conocimiento sobre el comportamiento de los precios de dicho activo y los pilares sobre los que se basa el modelo. En síntesis, se desarrollan en este trabajo los lineamientos generales del modelo del comportamiento del precio de las acciones, preliminares teóricos para adentrarse al entendimiento del modelo de Black-Scholes propiamente dicho.

PALABRAS CLAVES: Lema de Ito, Opciones, Proceso estocástico, Proceso de Wiener.

ABSTRACT
Oe will be this article principles of the mathematical modeling in the estimateof options on actions, basically n the referred thing to the behavior of the priceof the actions. In order to understand better the operations of these models it is necessary first of all to have certain knowlegde on the behavior of the price of actives saying and the pillars on which the model is based. In synthesis, the general lineamientos the model of the behavior of the prices of the actions are development in this work, theoretical preliminaries to enter itself to the understanding of the model of Black-Scholes itself.

KEYWORDS: *Lemma's Ito*, *process's Wiener, estochastic process.*

JHON JAIRO LEÓN S.
M.Sc. En Enseñanza de la Matemática.
Profesor Auxiliar Tiempo Completo
Universidad Tecnológica de Pereira
leónj@utp.edu.co

FERNANDO MESA
M.Sc. En Instrumentación Física
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
M.Sc. En Enseñanza de la Matemática.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas tres décadas del siglo XX, Black y Scholes[1] desarrollaron un modelo matemático de gran importancia en la valuación de las opciones sobre acciones. Este modelo conocido como *Modelo de Black-Scholes* es una aplicación de la idea de replicación que provee una elegante forma de solución para valuar opciones europeas[2]. La derivación de la solución está basada en los siguientes supuestos:

- El precio del activo subyacente se mueve de manera continua.
- La tasa de interés en conocida y constante.
- La varianza de los retornos es constante.
- No se realizan pagos de dividendos.
- Mercado de capitales perfecto (es decir, se permite las ventas en corto, no existen costos de transacción o impuestos y el mercado opera continuamente).
- Se cumple el principio de no arbitraje.

De los supuestos anteriores el más importante se refiere a la continuidad de los precios.

El supuesto subyacente al modelo es que el precio de las acciones sigue lo que se denomina un *"paseo aleatorio"*. Esto quiere decir que los cambios proporcionales en el precio de las acciones en un periodo de tiempo muy corto se distribuyen normalmente, es decir, que el precio de las acciones en cualquier momento futuro converge a una distribución lognormal[3]

1 En 1997 el Premio Nobel de Economía se otorgó a *Robert C. Merton* y a *Myron S. Scholes* en reconocimiento a su contribución en el área de ingeniería financiera.

2 Es aquel tipo de opción que sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento de la misma.

3 Mientras que una variable con distribución normal puede tomar cualquier valor en los reales, una variable distribuida lognormalmente solo puede ser positiva. Una distribución lognormal es asimétrica con media, mediana y moda diferentes.

Fecha de Recepción: 26 de enero de 2009
Fecha de Aceptación: 19 de marzo de 2009

A continuación se presentarán los principios estadístico-matemáticos pilares del modelo de Black-Scholes para la valuación de opciones sobre acciones.

2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Iniciemos considerando una variable aleatoria X que sigue un proceso de Markov[4]. Supongamos que su valor actual es de \$100 y que el cambio del valor durante un año es $N(0,1)$ donde $N(\mu,\sigma)$ denota una distribución de probabilidad de media μ y varianza σ. Nos podemos preguntar aquí ¿cuál es la distribución de probabilidad del cambio en el valor de la variable durante dos años?

El cambio durante este tiempo es la suma de dos distribuciones normales, donde cada una tiene media cero y varianza uno. Bajo el supuesto ya establecido de que la variable es del tipo Markov, las dos distribuciones de probabilidad son independientes. La suma de dos distribuciones normal independientes es a su vez una distribución normal cuya media es la suma de las medias y la varianza es la suma de las varianzas. Por lo tanto la media de la variable considerada será cero y si varianza igual a dos. El cambio de una variable en dos años se distribuye $N(0,2)$.

De lo anteriormente expuesto se tiene que el cambio de una variable durante un periodo de tiempo t se distribuye $N(0,t)$. En particular el cambio en una variable durante un periodo de tiempo muy corto Δt es $N(0,\Delta t)$.

El proceso seguido por la variable en cuestión es el conocido *Proceso de Wiener*[5]. Es un caso particular de un proceso estocástico de Markov con media cero y varianza 1 por un año. Las propiedades que cumple una variable Z dentro de un proceso de Wiener son las siguientes:

- El cambio ΔZ durante un periodo de tiempo muy corto Δt es: $\Delta Z = \lambda\sqrt{\Delta t}$, donde $\lambda \sim N(0,1)$.
- El valor de ΔZ para dos intervalos de tiempo diferentes Δt, es independiente.

De lo anterior se puede concluir que, ΔZ~$N(0,\Delta t)$ y además se puede inferir que Z sigue un proceso de Markov.

[4] Un proceso de Markov es un proceso estocástico que donde el valor de una variable sólo depende del valor de dicha variable en le momento inmediatamente anterior.

[5] El proceso de Wiener es la representación matemática del movimiento seguido por una partícula muy pequeña dentro de un fluido conocido como movimiento Browniano.

Un proceso de Wiener es el límite cuando Δt tiende a cero del proceso descrito para Z. El proceso de Wiener básico, ha sido desarrollado para tener una tasa de cambio de 0 y una tasa de varianza de 1. La tasa de cambio de cero significa que el valor esperado de Z en un momento futuro es igual a su valor actual. La tasa de varianza de 1 significa que la varianza del cambio en Z en un intervalo de tiempo t_0 es igual t. Un proceso de Wiener generalizado para una variable x puede ser definido en términos de dz como:

$$dx = adt + bdz$$

donde, a y b son constantes; Z significa que x tiene una tasa de cambio a por unidad de tiempo y bdz es la variabilidad o *riesgo* del cambio seguido por x.

De lo anterior, se sabe que en un intervalo de tiempo muy reducido Δt, el cambio en el valor de x, Δx, se determina por:

$$\Delta x = a\Delta t + b\lambda\sqrt{\Delta y}$$

donde $\lambda\sqrt{\Delta y} = \Delta z$. Se puede deducir entonces que, Δx tiene distribución normal con media igual $a\Delta t$ y desviación estándar $b\lambda\sqrt{\Delta y}$.

3. UN MODELO PARA PRECIOS DE ACCIONES

Hablaremos ahora de los procesos estocásticos comúnmente utilizados para el precio de acciones que no pagan dividendos (uno de los supuestos mencionados en la introducción).

Sería muy cómodo pensar que el precio de las acciones sigue un proceso de Wiener generalizado, es decir que su tasa de cambio y su tasa de varianza son constantes. Sin embargo no sería un modelo muy realista cuando recordamos que una de las características más importantes del precio de las acciones, es que *el porcentaje de retorno esperado requerido por los inversores es independiente del precio de la misma.* Luego el supuesto de tasa de cambio constante es inapropiado y debe ser reemplazado por el supuesto de que el retorno esperado es constante, es decir, el cambio esperado sobre el precio de la acción es constante. Si llamamos K el precio de la acción en un momento particular t, el cambio esperado en K debería suponerse como μK, para algún parámetro constante μ. Esto implica que para un intervalo de tiempo muy reducido, Δt, el incremento esperado de K es $\mu K\Delta t$. El parámetro μ representa la tasa de retorno esperada, expresada decimalmente. Si por ejemplo, la volatilidad[6] del precio de la acción fuera cero, este modelo determinaría que

$$\Delta K = \mu K \Delta t .$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero

$$dK = \mu K dt ,$$

de manera que

$$K_t = K_0 e^{\mu t} , \qquad (1)$$

donde K_0 es el precio de la acción en el instante cero y K_t es el precio de la acción al momento t.

La ecuación (1) indica, que cuando la varianza es cero, el precio de la acción crece a una tasa μ que capitaliza de manera continua. Obviamente, la realidad muestra que el precio de la acción exhibe una gran volatilidad. Un supuesto razonable es que la variabilidad del porcentaje de retorno en un periodo de tiempo muy corto, Δt, es la misma sin tener en cuenta el precio de la acción. Esto sugiere que la desviación estándar del cambio en un periodo de tiempo muy pequeño, debería ser proporcional al precio de la acción y conducir al modelo

$$dK = \mu K dt + \sigma K dz .$$

Esta última ecuación es el modelo más utilizado para determinar el comportamiento del precio de una acción. Este modelo también se conoce como *Movimiento Geométrico Browniano*. La versión en un intervalo discreto del tiempo es

$$\Delta K = \mu K \Delta t + \sigma K \lambda \sqrt{\Delta t} .$$

El término $\mu \Delta t$ es el valor esperado del retorno y el término $\sigma \lambda \sqrt{\Delta t}$ es el componente estocástico del retorno. La varianza del componente estocástico es $\sigma^2 \Delta t$, consistente con la definición de volatilidad; esto es, σ es tal que $\sigma \sqrt{\Delta t}$ es la desviación estándar del retorno en un intervalo de tiempo Δt. De todo esto podemos concluir que ΔK se distribuye normalmente con media $\mu \Delta t$ y desviación estándar $\sigma \sqrt{\Delta t}$. En otras palabras,

$$\Delta K \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}) .$$

4. EL LEMA DE ITO[7]

Este lema fue adaptado por *Robert C. Merton*[8] para producir una nueva fórmula de fluctuación de precios. Continuando el acercamiento a lo que será la derivación del modelo de Black-Scholes tenemos lo siguiente:

Otro tipo de proceso estocástico continuo, es conocido como el *Lema de Ito*, el cual es un proceso de Wiener generalizado donde los parámetros a y b son funciones del valor de la variable subyacente x y del tiempo, t. Algebraicamente,

$$dx = a(x,t)\Delta t + b(x,t)dz .$$

En un intervalo de tiempo reducido entre t y $t + \Delta t$, el cambio de la variable x a $x + \Delta x$ será:

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\lambda \sqrt{\Delta t} .$$

Esta relación asume que tanto la tasa de cambio como de varianza permanecen constantes e iguales a $a(x,t)$ y $b(x,t)^2$ respectivamente durante el intervalo de tiempo t y $t + \Delta t$.

El precio de una opción sobre acciones es función del precio de la acción subyacente y del tiempo. En otras palabras, el precio de cualquier derivado[9] es una función

[6] La volatilidad es la desviación estándar del cambio en el valor de un instrumento financiero con un horizonte temporal específico. Se usa con frecuencia para cuantificar el riesgo del instrumento a lo largo de dicho período temporal. La volatilidad se expresa típicamente en términos anualizados, y puede reflejarse tanto en un número absoluto como en una fracción del valor inicial. Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Volatilida

[7] Parte fundamental del cálculo de Ito, desarrollado por el matemático japonés Kiyosi Ito desde 1940, que considera aspectos análogos a los del cálculo clásico de Newton y Leibtniz, pero en condiciones aleatorias.

[8] Economista estadounidense, nacido en 1944, premio Nobel de Ciencias Económicas en 1997, compartido con Myron S. Scholes y al también economista estadounidense Fischer Black. Merton ideó una fórmula que determinaba el auténtico valor de los valores financieros (bonos, acciones, futuros). Desde mediados de la década de 1970, los mercados financieros y los bancos de todo el mundo han utilizado esta fórmula para calcular el riesgo que entrañan algunas inversiones, negocios y contratos.

Tomado de http://www.enriquedans.com/2005/10/robert-merton-en-el-instituto-de.html

[9] Un **derivado financiero** (o instrumento derivado) se basa en los precios de otro activo, de ahí su nombre, los activos de los que

de una variable estocástica subyacente al derivado y del tiempo, motivo por el cual, un estudio acerca de los derivados debería ofrecernos algún entendimiento sobre el comportamiento de funciones de variables estocásticas[10].

El lema de Ito supone que dz es un proceso de Wiener y que el valor de una variable x sigue el proceso Ito explicado anteriormente, donde la variable x tenía una tasa de cambio de $a(x,t)$ y una varianza de $b(x,t)^2$. El lema de Ito muestra que una función $\varphi(x,t)$ sigue el proceso

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} b dz .$$

Esta tiene una tasa de cambio de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} b^2 ,$$

Y una tasa de varianza

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 b^2 .$$

Anteriormente habíamos expresado que

$$dK = \mu K dt + \sigma K dz$$

con μ y σ constantes, es un modelo razonable del movimiento de los precios. El lema de Ito nos indica que le proceso seguido por una función $\varphi(x,t)$ es:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mu K + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sigma^2 K^2 \right) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma K dz$$

En esta última expresión K y φ se ven afectadas por la misma fuente de incertidumbre subyacente dz. Este hecho es fundamental en la derivación del resultado de Black-Scholes. Si además se utiliza el lema de Ito para derivar el proceso seguido por $\ln K$ y se define a $\varphi = \ln K$, debido a que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial K} = \frac{1}{K}; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial K^2} = -\frac{1}{K^2}; \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 ,$$

se puede determinar que el proceso seguido por φ es:

$$d\varphi = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz .$$

Debido a que μ y σ son constantes, esta ecuación indica que φ sigue un proceso de Wiener generalizado. Este tiene una tasa de cambio constante $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y una varianza constante σ^2. El cambio en φ entre el momento cero y un momento futuro T_n está definido:

$$N \square \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_n , \sigma^2 T_n \right) .$$

5. CONCLUSIONES

Se presentan hasta este punto los lineamientos generales sobre lo que se basa el desarrollo de Black-Scholes. Esta teoría en unión a los resultados de Black-Scholes, determinan uno de los descubrimientos más importantes de los últimos 35 años en el campo de la Matemática aplicada a las finanzas.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Z. Bodie, A. Kane, A. Marcus. *Principios de Inversiones.* Quinta edición. Madrid: McGraw-Hill, 2004, p. 384.

[2] P. Amster. *Un cuervo en el mundo de las finanzas.* http://divulgamat.ehu.es/weborriak/cultura/Literatura/CuervoFinanzas.asp

[3] Baxter, M. y A. Rennie. *Financial Calculus. An Introduction to Derivative.* Pricing Cambridge University Press (1996).

[4] Karatzas, I., Shreve, S.E. *Methods of Mathematical Finance.* New York, 1998.

dependen toman el nombre de activo subyacente, por ejemplo el futuro sobre el oro se basa en los precios del oro. Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Derivados_financieros

[10] Las bases teóricas de estos estudios las puso *Kiyoshi Ito* en 1942 cuando desarrolló y probó lo que actualmente se conoce como el lema de *Ito*. Ese teorema describe un comportamiento aleatorio por medio de una complicada ecuación. Estas fueron tal vez las primeras aventuras de los matemáticos para modelar las finanzas. Tomado de "El nuevo mundo de las Matemáticas y de las Finanzas" de *Carlos Bosch Giral* http://laberintos.itam.mx/PDF/num5/134

[5] Merton, R.C. *Theory of Rational Option Pricing*, The Bell Journal of Economics and Mangement Science, 4: 141-183. 1973.

[6] Wilmott, P., *et al.,* (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press. (1995)