

## REDUCCIÓN DE OPERACIONES EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE GRAN ESCALA APLICANDO SIMULATED ANNEALING

### Reduction of operations in solving large-scale system of linear equations applying Simulated Annealing

#### RESUMEN

Este documento describe una novedosa técnica basada en un algoritmo metaheurístico denominado *Simulated Annealing* aplicado al ordenamiento de ecuaciones lineales en el proceso de solución, y con el cual, se busca reducir el apareamiento de elementos de relleno que surgen en dicho proceso. Se describe en detalle la metodología aplicada y, para validarla, se pone a prueba en redes estándares IEEE de diferente complejidad.

**PALABRAS CLAVES:** Elementos de Relleno, Grado de Dispersidad, Recocido Simulado, Técnicas de Dispersidad, Ordenamiento Matricial.

#### ABSTRACT

*This paper describes a novel approach based on metaheuristic algorithm called Simulated Annealing applied to the management of linear equations in the settlement process. This technique is aimed at reducing the appearance of filling elements that arise in this process. This paper describes in detail the methodology and to validate it, several tests in power networks of varying complexity standardized by the IEEE are presented.*

**KEYWORDS:** Fill-in, *Simulated Annealing*, *Sparse Matrix Methods*, *Sparse Vector Methods*.

#### JORGE MARIO ARIAS P.

Ingeniero Electricista  
Asistente de Investigación  
Universidad Tecnológica de Pereira  
[jorgeutp@gmail.com](mailto:jorgeutp@gmail.com)

#### JULIAN DAVID GONZÁLEZ H.

Ingeniero Electricista  
Profesor Catedrático  
Programa de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
[jdgh85@gmail.com](mailto:jdgh85@gmail.com)

#### RAMÓN ALFONSO GALLEGOR.

Ingeniero Electricista, PhD  
Profesor Titular  
Programa de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
[ragr@utp.edu.co](mailto:ragr@utp.edu.co)

## 1. INTRODUCCIÓN

Gran número de fenómenos y procesos reales que se analizan en ingeniería son modelados a través de sistemas de ecuaciones lineales en los cuales interviene un gran número de variables. En el caso específico del modelamiento de sistemas eléctricos de potencia a gran escala, donde el número de variables es muy alto y cuya información es almacenada en matrices de gran tamaño, se cuenta con una característica importante: un alto grado de dispersidad. En este artículo se plantea una estrategia de solución que se basa principalmente en la conservación de este grado de dispersidad cuando se desarrollan los factores triangulares de la matriz.

Debido a la característica dispersa de las matrices que intervienen en el proceso, es de vital importancia aprovechar de manera adecuada las ventajas que trae el hecho de trabajar con pocos elementos no nulos. Para esto, se han desarrollado las denominadas técnicas de dispersidad, las cuales se fundamentan en tres principios básicos a saber: minimizar la cantidad de datos a almacenar, minimizar el número de operaciones a realizar y conservar la dispersidad.

Para minimizar el número de operaciones necesarias al resolver un conjunto de ecuaciones de la forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  y conservar la dispersidad del mismo, es necesario ordenar el sistema de ecuaciones y de esta manera reducir el número de elementos que pueden surgir en el proceso de solución, denominados elementos de relleno.

Dentro de las estrategias planteadas para ordenar un sistema algebraico lineal, de gran escala y disperso, sobresalen los esquemas de ordenamiento introducidos por Tinney et al. [1], los cuales, han sido descritos también por Alvarado et. al en [2]; estas estrategias han sido aplicadas en la solución de diferentes problemas tales como el caso de corto circuito [2], [3], el problema de compensación [4], [5], y en el problema de flujo de carga por el método de Newton [6]. Recientemente, unas metodologías basadas en la eliminación sucesiva con particiones han sido propuestas para optimizar la inversa de los factores triangulares de la matriz  $\mathbf{A}$  [7], [8], [9].

Este documento plantea una novedosa estrategia para obtener el orden óptimo de un sistema de ecuaciones

lineales aplicando una metodología heurística denominada Simulated Annealing. Para ello, se presenta el problema en la sección 2, se analiza en detalle el algoritmo Simulated Annealing en la sección 3, la metodología propuesta es presentada en la sección 4, los resultados obtenidos al optimizar los sistemas de prueba IEEE-14, IEEE-30, IEEE-57 y IEEE-118 se presentan en la sección 5. En esta, se presenta un cuadro con los resultados obtenidos, comparándolos con los resultados generados con otras metodologías planteadas en la literatura especializada. Finalmente, en la sección 6, se presentan las conclusiones generadas en esta investigación.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Para formular el problema de optimización, es necesario comenzar con un ejemplo sencillo. Por ejemplo, el sistema eléctrico de corriente continua ilustrado en la Figura 1, donde el nodo 2 está conectado directamente a la referencia del sistema a través de una impedancia de rama con valor igual a 1.0 pu.

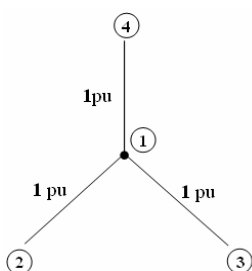


Figura 1. Sistema Eléctrico de 4 barras

La matriz de admitancia nodal para este sistema se ilustra en la Figura 2. Al aplicar el proceso de eliminación Gaussiana los elementos de la matriz triangular inferior tendrán todos valores iguales a cero.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 2. Matriz de Admitancia nodal de la red de 4 barras

Comenzando con la primera columna, se tiene que:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 3. Matriz de admitancia nodal equivalente

Se puede observar cómo ciertas posiciones de la matriz original que presentan un valor de cero (Figura 2),

después de eliminar la primera columna (Figura 3) presentan un valor diferente de cero. Estos elementos se denominan *elementos de relleno*, o mejor conocidos como “*fill-in*”, un término anglosajón comúnmente utilizado. El equivalente eléctrico de la matriz de admitancia nodal de la Figura 3, se ilustra en la Figura 4.

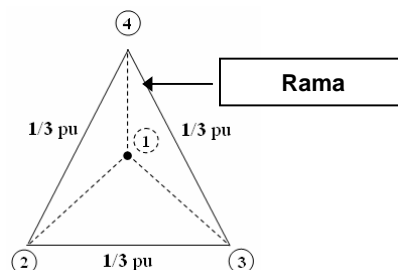


Figura 4. Sistema Eléctrico Equivalente

Como bien puede observarse, se han generado 3 ramas ficticias que hacen parte de la nueva topología de la red, y esto indica que es necesario almacenar posiciones que antes eran cero y hacer operaciones con ellas.

Ahora se realiza una permutación simétrica a la matriz presentada en la Figura 2, esto es:

$$\mathbf{A}_{ord} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \tag{1}$$

Donde  $\mathbf{P}$  se define como la matriz de permutación unitaria y tiene la forma de:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz permite intercambiar la variable 4 con la variable 1, luego de lo cual, la matriz  $\mathbf{A}_{ord}$  toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_{ord} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Continuando con el mismo procedimiento anterior, y aplicando eliminación Gaussiana al sistema ordenado, se genera el siguiente sistema equivalente:

$$\mathbf{A}'_{ord} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que no se generó ningún elemento de relleno, lo cual es algo muy favorable al almacenar menor cantidad de elementos y realizar menos operaciones. La red equivalente de esta matriz es:

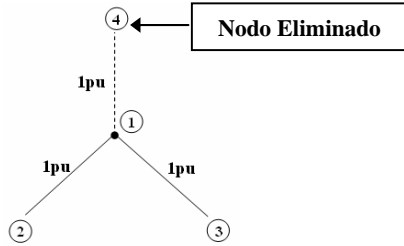


Figura 5. Sistema Eléctrico Equivalente

Este hecho determina la importancia del ordenamiento matricial, y puede ser definido como la forma estratégica de eliminar variables del sistema con el fin de generar un número mínimo de elementos de relleno o *fill-in's*, teniendo como ventajas las mencionadas anteriormente.

Existen algoritmos para generar un orden estratégico en un sistema matricial, entre ellas se pueden citar los esquemas de ordenamiento de Tinney [1], y los métodos de ordenamiento y procedimientos matemáticos presentados en [10], [11], [12].

El modelo matemático del problema de ordenamiento matricial es presentado en (2), el cual puede resolverse aplicando programación entera.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{x} \in \square \\ 1 \leq x_i \leq n \\ x_i \neq x_{i+j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \mathbf{x}_{new} = \mathbf{x}_{old} \cdot \mathbf{P} \end{array} \right. \quad (2)$$

Donde  $f(\mathbf{x})$  representa el número de *fill-in* que surgen en el proceso de inversión,  $\mathbf{x}$  es un vector que almacena el orden de la matriz y  $n$  es el número de columnas o filas que la componen;  $x_i$  es una posición del vector  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{P}$  corresponde a una matriz de permutación unitaria.

### 3. SIMULATED ANNEALING

Simulated Annealing es un algoritmo de optimización combinatorial que realiza *búsqueda local* en el proceso de exploración de nuevas configuraciones. Su funcionamiento simula el proceso físico del recocido de sólidos, en el cual se busca obtener estados de baja

energía en un sólido sometido a un gradiente de temperatura [13]

El Simulated Annealing se fundamenta en el algoritmo de Metropolis et al. [14] el cual a su vez se basa en las técnicas de Monte Carlo [15] los cuales generan una secuencia de estados del sólido en la siguiente forma: dado el estado actual  $i$  del sólido con energía  $E_i$ , seguido de un estado posterior  $j$  que es generado a partir de la aplicación de un mecanismo de perturbación que transforma el estado actual en un estado próximo por medio de una pequeña perturbación, por ejemplo mediante el desplazamiento de una partícula. Se podría pasar al estado de energía  $E_j$  si se cumple alguna de las siguientes condiciones: si la diferencia de energía  $E_j - E_i$  es menor o igual a cero, el estado  $j$  se acepta como el estado actual. Si la diferencia de energía es mayor que cero, entonces el estado  $j$  se acepta con una probabilidad dada por

$$e^{-\frac{E_i - E_j}{k_b T}} \quad (3)$$

Donde  $T$  denota la temperatura a la que se somete el sólido y  $k_b$  es una constante física llamada constante de Boltzmann. Se sabe que, si la reducción de la temperatura se hace de manera gradual, el sólido puede llegar al equilibrio térmico en cada nivel de temperatura. En el algoritmo de Metropolis esto se logra mediante la generación de un gran número de transiciones en un determinado valor de temperatura.

El algoritmo de Metropolis puede ser utilizado para generar una secuencia de soluciones de un problema de optimización combinatorial asumiendo las siguientes equivalencias entre un sistema físico compuesto de un gran número de partículas y un problema de optimización combinatorial:

- Las soluciones en el problema de optimización combinatorial son equivalentes a los estados del sistema físico.
- El costo de una solución es equivalente a la energía de un estado.

Por otra parte, se introduce un parámetro de control que desempeña el papel de la temperatura. El Simulated Annealing, por tanto, puede considerarse como una iteración del algoritmo de Metropolis, ejecutado como la disminución de los valores del parámetro de control.

Tal como se describe en la ecuación (3), una característica del Simulated Annealing es que además de aceptar mejoras en la función objetivo también acepta empeoramientos de forma limitada. Inicialmente, para

valores grandes de  $T$ , serán aceptados grandes empeoramientos; y a medida que  $T$  disminuye sólo serán aceptados deterioros pequeños. Finalmente, cuando  $T$  tiende a cero, sólo se aceptan mejoramientos de la función objetivo [16]

#### 4. METODOLOGÍA PROPUESTA

De acuerdo a lo descrito en las secciones anteriores, el problema a ser solucionado consiste de dos etapas: la primera de ellas es encontrar el orden óptimo del sistema y la segunda darle solución mediante la aplicación de la conocida técnica de factorización LDU.

##### A. Implementación

La idea se enfoca en obtener el vector  $\mathbf{X}$ , basándose en el criterio de vecindad, el cual se describe posteriormente, de tal forma que se minimice la función objetivo del problema, la cual representa el número de elementos de relleno del sistema.

La función objetivo puede ser evaluada con facilidad después de tener una combinación previa. Una de las estrategias a seguir, es ordenar la matriz de coeficientes respecto al orden de variables establecido por el vector  $\mathbf{X}$ . Una vez ordenada esta matriz, se cuantifica el número de ceros o entradas nulas que presenta el sistema, este valor se denomina  $f_1$ . Se lleva la matriz ordenada a su forma escalonada aplicando por ejemplo eliminación Gaussiana. Al obtenerse la matriz triangular superior, se cuantifica el número de elementos nulos presentes en este triángulo superior, a este valor se le denomina  $f_2$ . Entonces, el valor de la función objetivo será:

$$f(\mathbf{x}) = f_1 - 2 \cdot f_2 \tag{5}$$

La única condición de validez para aplicar (5), es que la matriz de coeficientes sea estructuralmente simétrica, lo que comúnmente sucede en el análisis de redes eléctricas.

- Codificación y Criterio de Vecindad

El vector  $\mathbf{X}$  constituye una propuesta de ordenamiento de las variables del sistema, de esta forma, la primera variable localizada en el vector relaciona la primera columna de la matriz en ser eliminada. Es evidente que los elementos del vector  $\mathbf{X}$  son números enteros comprendidos entre  $[1,2,\dots,n]$ , donde  $n$  es igual al rango de la matriz  $A$ . Un vecino de este vector, puede obtenerse realizando una permutación entre un par de elementos de  $\mathbf{X}$ . Por ejemplo, una matriz de  $4 \times 4$ , posee un vector:

$$x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

Si se genera un vecino de este vector, intercambiando el elemento  $x(1,4)$ , por el elemento  $x(1,1)$ , se tiene:

$$x_{vec} = [4 \ 2 \ 3 \ 1]$$

Este intercambio genera una matriz de permutación  $P$ , la cual es igual a:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y con ella, es posible obtener la matriz  $A$  ordenada por medio de la ecuación (1).

##### B. Simulated Annealing aplicado al Ordenamiento Óptimo

En la implementación de este algoritmo se requiere de la calibración de cinco parámetros a saber: temperatura inicial, longitud de la cadena, tasa de enfriamiento, tasa de crecimiento de la cadena y temperatura final.

El algoritmo ilustrado mediante el flujograma de la figura 6 presenta el procedimiento seguido en el cálculo de la temperatura inicial.

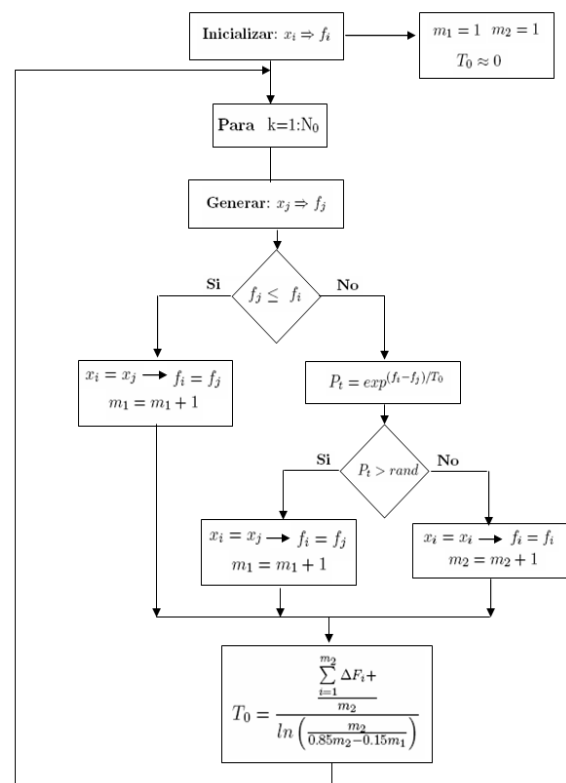


Figura 6 Flujograma representativo para determinar la temperatura inicial del proceso

$\Delta F_i + / m_2$  corresponde al costo promedio de las  $m_2$  transiciones que no fueron aceptadas en el proceso iterativo. Éste se repite iterativamente hasta que la suma del número de transiciones y de no aceptaciones sea igual a la longitud de la cadena  $N_0$ .

La longitud de la cadena inicial es calculada como el producto del número de variables  $n$  por una constante  $k$  y forma parte de la calibración de parámetros.

Una vez calculada la temperatura inicial, se aplica el programa de enfriamiento, tal como se muestra en la figura 7.

El proceso de la Figura 7 es inicializado con la última configuración encontrada con el algoritmo de la temperatura inicial. La búsqueda es más exhaustiva a medida que el parámetro de control (la temperatura) disminuye, pues se realiza un mayor número de transiciones para cada nivel de temperatura.

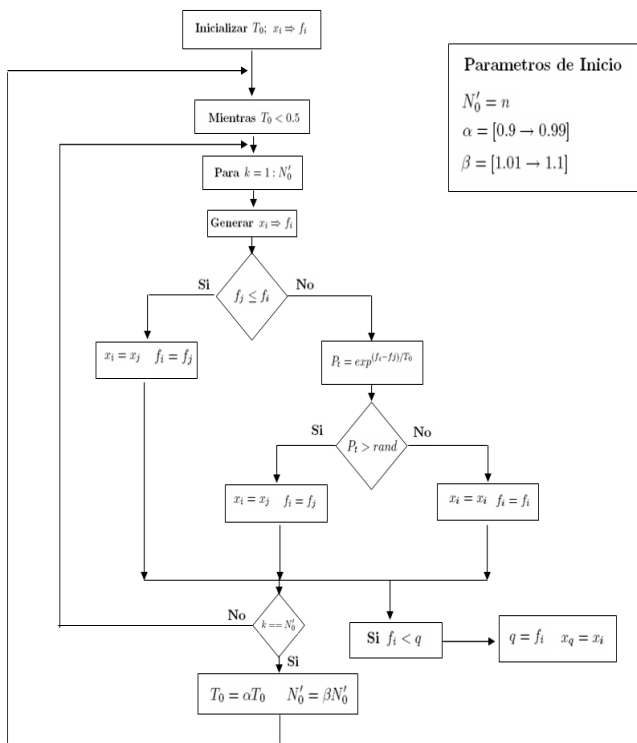


Figura 7 Flujoograma representativo del algoritmo de optimización

5. RESULTADOS

Una vez logrado el ordenamiento generado por el algoritmo anteriormente descrito, se tiene un sistema, el cual al ser descompuesto en las matrices L, D y U, conservará al máximo la dispersidad en sus factores triangulares inferior y superior. Al almacenar estos factores de forma compacta, haciendo uso de las denominadas técnicas de vectores dispersos, garantizará que el número de operaciones requeridas en el proceso de solución sea menor al que se requerirían si el sistema no fuese previamente ordenado.

Para verificar la validez de la metodología propuesta, se utiliza la solución del flujo de carga DC en diferentes sistemas de prueba IEEE: 14, 30, 57 y 118 nodos.

Producto de ello se obtuvieron los resultados ilustrados en la tabla 1.

Sistema	Sin Ordenar		Ordenado	
	Fill-in	Operaciones	Fill-in	Operaciones
IEEE-14	14	112	8	76
IEEE-30	174	316	28	170
IEEE-57	790	1060	118	388
IEEE-118	1692	2286	168	762

Tabla 1. Resultados Obtenidos en Sistemas de Prueba IEEE

En la tabla anterior, se ilustran el número de operaciones realizadas al solucionar el flujo de carga DC antes y después de que el sistema sea ordenado, al igual que el número de elementos fill-in que se generan en cada proceso. Entre mayor sea el tamaño del sistema, el número de operaciones requeridas al igual que el número de elementos de relleno aumentan y con esto el tiempo de cómputo.

En la tabla 2 se presenta el porcentaje de disminución del número de operaciones y número de fill-in cuando el sistema es ordenado con respecto al sistema original (sin ordenar). Por ejemplo, en el sistema IEEE-14 la reducción del número de operaciones y del número de elementos de rellenos es del 32.14% y 42.86% respectivamente, mientras que para el sistema IEEE-118 es del 66.67% y 90.07%.

Sistema	Porcentaje de Disminución	
	Fill-in (%)	Operaciones (%)
IEEE-14	42,86	32,14
IEEE-30	83,91	46,2
IEEE-57	85,06	63,4
IEEE-118	90,07	66,67

Tabla 2. Disminución porcentual de operaciones y Fill-in

En la tabla 3 se ilustran diferentes metodologías de ordenamiento aplicadas al problema y expuestas en la literatura especializada por otros autores. La base de datos utilizada para este análisis corresponde al sistema de prueba IEEE-118. Esta tabla contiene el número de fill-in resultante, al igual que el número de operaciones necesarias para dar solución al sistema empleando cada una de las metodologías citadas.

Metodología	Resultados	
	Fill-in	Operaciones
Sch2	1055	2812
Sch3	1097	2887
GF1	846	2341
GF2	833	2342
GF3	868	2522
MDML	796	2261
MLMD	762	2448
MFI-1	759	2261
MFI-2	732	2197
ANNEALING	168	762

Tabla 3. Comparación de Resultados entre diferentes metodologías de ordenamiento

Los datos que se presentan en la tabla 3 fueron obtenidos del artículo de Wang y Gooi [10]. Puede observarse claramente la superioridad de la metodología propuesta en la presente investigación con respecto a las demás metodologías de la literatura especializada.

Metodología de Ordenamiento	
Sch2	Esquema 2 de Tinney
Sch3	Esquema 3 de Tinney
GF1	Gomes y Franquelo 1
GF2	Gomes y Franquelo 2
GF3	Gomes y Franquelo 3
MDML	Betancourt 1
MLMD	Betancourt 2
MFI-1	Wang y Gooi 1
MFI-2	Wang y Gooi 2
ANNEALING	Metodología Propuesta

Tabla 4. Nombre de las Metodologías de la Tabla 3

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir del presente documento se puede concluir que:

- Se propone una metodología para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, donde se encuentra un orden del sistema capaz de reducir el número de elementos fill-in, lo cual reduce considerablemente el tiempo de cómputo invertido para la solución del sistema.
- La aplicación de técnicas de optimización combinatorial como el Simulated Annealing al problema del ordenamiento matricial arroja excelentes resultados en cuanto a la calidad de la respuesta. Pues como se pudo constatar con las pruebas realizadas durante la investigación, la metodología que se propuso logró superar la mejor respuesta obtenida por técnicas convencionales, reduciendo el número de elementos de relleno y, a su vez, el número de operaciones necesarias para la obtención de la solución del sistema de manera significativa.
- A medida que el programa producto del presente artículo se somete a problemas cada vez más grandes, las cualidades que lo identifican y otras características representativas mejoran ostensiblemente. Por ejemplo, tal cual se puede observar en la tabla 2, entre mayor sea el tamaño del sistema, el número de operaciones que se debe realizar para llevar a cabo el proceso de solución disminuye en gran medida.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

[1] W. F. Tinney, V. Brandwajn and S. M. Chan, "Sparse Vector Methods," IEEE Trans. on Power App. And Systems, Vol. 104, No. 2, Feb. 1985, pp. 295-301.

[2] F. L. Alvarado, S. K. Mong and M. K. Enns, "A Fault Program with Macros, Monitors and Direct Compensation in Mutual Groups," IEEE Trans. On Power App. and Systems, May 1985, pp 1109-1 120.

[3] K. Takahashi, J. Fagan and M. Chen, "Formation of a Sparse Bus Impedance Matrix and Its Application in Short Circuit Studies," 1973 PICA Conference Proc., Minneapolis, Minnesota, June 1973, pp. 63-71.

[4] O. Alsac, B. Stott and W. F. Tinney, "Sparsity Oriented Compensation Methods for Modified Network Solutions," IEEE Trans. on Power App. and Systems, Vol. PAS-102, No. 5, pp. 1050-1060, May 1983.

[5] S. M. Chan and V. Brandwajn, "Partial Matrix Refactorization," IEEE Trans. on Power App. and Systems, Vol. PWRS-1, No. 1, pp. 193-200, Feb. 1986.

[6] R. Bacher and W. F. Tinney, "Faster Local Power Flow Solutions: The Zero Mismatch Approach," IEEE 1989 Winter Power Meeting, New York, Feb. 1989.

[7] H. S. Stone, "An Efficient Parallel Algorithm for the Solution of a Tridiagonal System of Equations," J. Of the ACM, Vol. 20, No. 1, Jan. 1973, pp. 183-208.

[8] D. A. Calahan, "Parallel Solution of Sparse Simultaneous Linear Equations," Proc. 1 I\* Allerton Conf. On Circuit and System Theory, U. of Illinois, 1973.

[9] F. L. Alvarado, "Parallel Solution of Transient Problems by Trapezoidal Integration," IEEE Trans. Power App. & Syst., May-June 1979, pp. 1080-1090.

[10] F. L. Alvarado and S. Y. Lee, "Sparsity Preservation in Global Numerical Formulations of Ordinary Differential Equations," International Conf. on Electric Power Problems: The Mathematical Challenge (SIAM), Seattle, Wash. March 18-20, 1980.

[11] A. Abur, "A Parallel Scheme for the Forward/Backward Substitutions in Solving Linear Equations," IEEE Trans. in Power Systems, Nov. 1988, pp. 1471-1478.

[12] R. Betancourt and F. L. Alvarado, "Parallel Inversion of Sparse Matrices," IEEE Trans. on Energy Systems, Feb. 1986, pp. 74-81.

[13] Kirkpatrick S., Gelatt Jr C. D. and Vecchi M. P. "Optimization by simulated annealing". Science Vol 220. pp 671-680. 1983.

[14] Metropolis M., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. and Teller E. "Equation of state calculations by fast computing machines". J. Chem. Phys. Vol. 21. pp 1087-1092. 1953.

[15] Binder K. "Monte Carlo Methods in Statistical Physics". Springer. Berlin. 1978.

[16] Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G., Kann V., Marchetti-Spaccamela A. And Protasi M. "Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and their Approximability Properties". Springer. Berlin. 1999.