

## FUNDAMENTOS Y APLICACIÓN DEL MUESTREO EN SEÑALES UBICADAS EN LAS BANDAS ALTAS DEL ESPECTRO

### Purpose and scope of sampling signal locations in the high band of the spectrum

#### RESUMEN

En este artículo, se presenta el estudio del muestreo pasabanda desde el punto de vista conceptual y de su fundamentación. Cuando se requiere muestrear una señal analógica para su posterior transmisión en forma digital, siempre se toma como base el criterio de Nyquist, el cual indica que dicho muestreo se debe realizar al doble de la frecuencia máxima contenida en la señal; criterio que para señales que están ubicadas en la parte más alta del espectro (orden de los MHz o GHz) sería poco práctico, por tanto se puede recurrir al criterio que indica que el muestreo se realice al doble del ancho de banda, condición que se pretende desarrollar en el documento.

**PALABRAS CLAVES:** Analógico, Ancho de Banda, Digital, Espectro, Muestreo, Señal.

#### ABSTRACT

*This paper introduces the bandpass sampling study from the conceptual point of view and its fundamentals. When sampling of an analog signal is required for onward transmission in digital format, it always takes as its basis the Nyquist criterion, which indicates that the sampling should be carried out twice the maximum signal frequency ;this criterion would be impractical for signals that are located in the highest part of the spectrum (MHz or GHz order) , therefore we can resort to the criterion that stands that sampling is carried out twice the bandwidth, a criterion which is developed in this article.*

**KEYWORDS:** Analog, Bandwidth, Digital, Spectrum, Sampling, Signal.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Cuando se tienen señales ubicadas en la parte más alta del espectro, tal como se muestra en la Figura 1, cuya menor frecuencia ( $F_{\min}$ ), sea mayor que el ancho de Banda ocupado (BW), definido como la diferencia entre la Frecuencia más alta y la más baja ( $F_{\max} - F_{\min}$ ), es posible realizar su muestreo a una frecuencia menor que la que impondría Nyquist, siempre que se garantice que las repeticiones espectrales no se superpongan con el espectro.

#### JIMMY ALEXANDER CORTÉS OSORIO.

Ingeniero Electricista.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
Profesor Asistente.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
jcortes@utp.edu.co

#### HUGO BALDOMIRO CANO GARZÓN.

Ingeniero Electricista.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
Especialista en Gerencia de Tecnología.  
Convenio UTP - EAN.  
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
Profesor Auxiliar.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
hbcano@utp.edu.co

#### JOSÉ ANDRÉS CHAVES OSORIO.

Ingeniero Electricista.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
Especialista en Pedagogía.  
Universidad Nacional Abierta y a Distancia.  
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
Profesor Asistente.  
Universidad Tecnológica de Pereira.  
jachaves@utp.edu.co

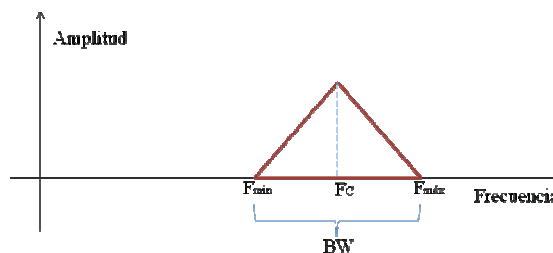


Figura 1. Señal ubicada en la parte alta del espectro  
Sin embargo, el muestreo de estas señales también conocido como muestreo pasabanda tienen gran utilidad en los sistemas de procesamiento de señales digitales, tomando como base el desarrollo del teorema del muestreo de Shannon.

## 2. MUESTREO

El muestreo, también denominado “Discretización de señal”, es el primer paso en el proceso de conversión de una señal analógica (tiempo y amplitud continuos) en una señal digital (tiempo y amplitud discretos).

La conversión de la señal Análoga en Digital (Conversión A/D) se realiza, entre otras razones porque las señales digitales presentan grandes ventajas a la hora de ser transmitidas y/o procesadas: mayor inmunidad al ruido, mayor facilidad de procesamiento y facilidad de multiplexaje<sup>1</sup>.

En las aplicaciones tecnológicas “las muestras” se toman a intervalos de tiempo “iguales”, proceso denominado “Muestreo periódico de la señal”, lo que facilita procesos como el de la “Reconstrucción de la señal”.

## 3. TEOREMA DEL MUESTREO

Si una señal continua,  $S(t)$ , tiene una banda de frecuencia tal que  $F_{\text{máx}}$  sea la mayor frecuencia comprendida dentro de dicha banda, dicha señal podrá reconstruirse sin distorsión a partir de muestras de la señal tomadas a una frecuencia  $f_s$  siendo  $f_s > 2 F_{\text{máx}}$ . En la Figura 2 se muestra un esquema simplificado del proceso de muestreo.

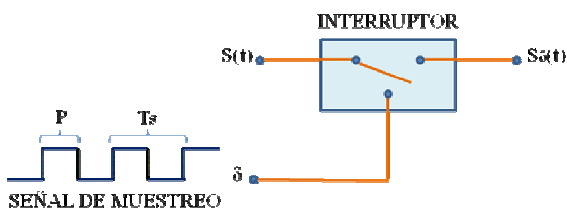


Figura 2. Esquema simplificado del proceso de muestreo

Cabe anotar que en las aplicaciones el interruptor no es del tipo mecánico, puesto que por lo general la frecuencia  $f_s$  es bastante alta; por lo que suelen emplearse transistores de efecto campo como interruptores, para cumplir los requerimientos que se le exigen al sistema; dentro de los que se encuentran:

- Elevada resistencia de aislamiento cuando los interruptores (transistores) están desconectados.
- Baja resistencia si los interruptores están conectados o cerrados.
- Elevada velocidad de conmutación entre los dos estados de los interruptores.

Es apropiado observar nuevamente la Figura 1 y recordar las formas de las tres señales principales:

$S(t)$ : Señal a muestrear

$\delta$ : Señal de muestreo

$S_s(t)$ : Señal muestreada

Así mismo en la Figura 1 se define:

$T_s$ : Período de la señal de muestreo

$P$ : Tiempo de duración del pulso

Vale la pena recordar que desde el punto de vista de la cuantificación de la señal muestreada, lo ideal es que el tiempo que dura el interruptor activo ( $P$ ), fuese prácticamente cero, ya que de otro modo, la señal muestreada puede variar enormemente en dicho tiempo y hacer poco exacta su cuantificación.

### 3.1 Aplicación del Teorema del muestreo

Como es sabido el Teorema del muestreo se aplica a través del muestreo periódico de una señal analógica; por ejemplo cuando se graba una señal de audio al computador utilizando una tarjeta de sonido, el conversor A/D del PC estará digitalizando la señal a una cierta frecuencia tal como 11, 22, ó 44 kHz, denominada frecuencia de muestreo<sup>2</sup>. Considerando que un ser humano puede percibir sonidos entre 20 Hz y 20 kHz; es fácil apreciar que aplicando el Teorema del muestreo; es decir muestreando al doble de la frecuencia máxima que un hombre o mujer puede escuchar, queda contemplado todo su rango de frecuencia audible; es decir que si:

$$f_s = 2 \times 20 \text{ kHz}$$

$$f_s = 40 \text{ kHz}$$

Es claro que muestreando a 40.000 Hz no habrá pérdida de información (no se perderán las frecuencias contenidas, por ejemplo en una grabación digital y que luego quieran ser escuchadas, como pueden ser sonidos de animales o de instrumentos de frecuencia inferior o igual a 20 kHz)

Adicionalmente es evidente que si la frecuencia de muestreo es muy baja; es decir, las mediciones son demasiado espaciadas, se perderán “detalles” de la señal original; lo anterior se puede apreciar mediante una simple demostración gráfica a través de la Figura 3 subdividida en A-B-C-D; en donde se han representado cuatro señales distintas (en línea azul) muestreadas periódicamente a igual frecuencia (los círculos rojos denotan las “muestras”). En A y B las señales aparecen correctamente representadas por las muestras, en C la velocidad de muestreo parece insuficiente, y en D las muestras representan una señal como la de B; es decir la señal de D es un “alias” de la señal de B, a este efecto se le denomina en inglés “aliasing”.

<sup>1</sup> <http://prof.usb.ve/tperez/docencia/2422/contenido/muestreo/muestreo.htm>. [1]

<sup>2</sup> Electrónica General y Aplicada – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Cuyo [2]

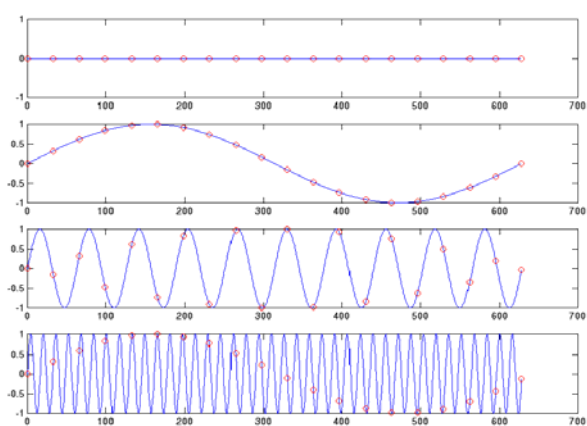


Figura 3. Señal análoga y su señal muestreada

### 3.2 Aliasing

El aliasing es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se les muestrea digitalmente. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma unívoca a partir de la señal digital<sup>3</sup>.

El aliasing es un fenómeno propio de la conversión A/D, en el cual la frecuencia de la señal reconstruida es menor que el de la señal original, lo cual ocurre cuando la frecuencia de muestreo es demasiado baja; estos efectos pueden reducirse utilizando filtros<sup>4</sup>.

### 3. CRITERIO DE NYQUIST SHANNON

El criterio de Nyquist-Shannon, también denominado Teorema del Muestreo Pasabanda, establece que la frecuencia mínima de muestreo necesaria para evitar el “aliasing” debe ser:

$$F_s > 2 BW$$

Con:

$f_s$ : frecuencia de muestreo

$BW$ : ancho de banda de la señal a muestrear

$BW = F_{\text{máx}} - F_{\text{mín}}$

Para señales con  $F_{\text{mín}} = 0$ , la expresión queda:

$$f_s > 2 F_{\text{máx}}$$

Que coincide con la aplicación del Teorema general del muestreo.

El criterio de Nyquist Shannon redefine el Teorema del muestreo aplicándolo a un Ancho de Banda de interés específico, lo que soluciona ciertas dificultades que

pueden presentarse al intentar muestrear señales a frecuencias elevadas.

Es posible muestrear a una frecuencia menor que la que impondría Nyquist siempre que se garantice que las repeticiones espectrales no se superponen con el espectro, siempre que  $BW$  (ancho de banda de la señal) sea menor que  $F_{\text{mín}}$ <sup>5</sup>.

Por ejemplo, si se quiere muestrear una señal de la que se sabe se encuentra compuesta por frecuencias entre 12 MHz y 13 MHz, la aplicación del Teorema general del muestreo plantearía que la señal debe muestrearse como mínimo a:

$$\begin{aligned} f_s &= 2 F_{\text{máx}} \\ f_s &= 2 (13 \text{ MHz}) \\ f_s &= 26 \text{ MHz} \end{aligned}$$

Frecuencia que es demasiado alta para un muestreo típico.

Por el contrario, al aplicar el criterio de Nyquist Shannon, sería suficiente con:

$$\begin{aligned} f_s &= 2 BW \\ f_s &= 2 (F_{\text{máx}} - F_{\text{mín}}) \\ f_s &= 2 (13 \text{ MHz} - 12 \text{ MHz}) \\ f_s &= 2 \text{ MHz} \end{aligned}$$

Frecuencia de muestreo que puede ser más sencilla de implementar y donde se verifica que:

$$\begin{aligned} F_{\text{mín}} &> BW \\ 12 \text{ MHz} &> 1 \text{ MHz} \end{aligned}$$

Otros criterios de muestreo mínimo para señales pasabanda, se utilizan, teniendo en cuenta la cantidad de replicas espectrales que se puedan colocar entre las densidades espectrales originales, según [6] y [7], para el ejemplo presentado, se podría muestrear a una frecuencia de entre dos y cuatro veces el ancho de banda.

### 4. FILTRO ELECTRÓNICO

Un filtro eléctrico o filtro electrónico es un elemento que discrimina una determinada frecuencia o gama de frecuencias de una señal eléctrica que pasa a través de él, pudiendo modificar tanto su amplitud como su fase.

#### 4.1 Tipos de Filtro según respuesta frecuencia

**Filtro pasa bajo:** Es aquel que permite el paso de frecuencias bajas, desde frecuencia 0 o continua directa

<sup>3</sup> [http://es.wikipedia.org/wiki/Aliasing#Criterio\\_de\\_Nyquist](http://es.wikipedia.org/wiki/Aliasing#Criterio_de_Nyquist) [3]

<sup>4</sup> <http://commons.wikimedia.org/wiki/Aliasing> [4]

<sup>5</sup> <http://prof.usb.ve/tperez/docencia/2422/contenido/muestreo/muestreo.htm> [5]

hasta una de valor determinado. Presentan ceros a alta frecuencia y polos a bajas frecuencia.

**Filtro pasa alto:** Es el que permite el paso de frecuencias desde una frecuencia de corte determinada hacia arriba, sin que exista un límite superior especificado. Presentan ceros a bajas frecuencias y polos a altas frecuencias.

**Filtro pasa banda:** Es aquel que permite el paso de componentes frecuenciales contenidos en un determinado rango de frecuencias, comprendido entre una frecuencia de corte superior y otra inferior.

**Filtro elimina banda:** También llamado filtro rechaza banda, es el que dificulta el paso de componentes frecuenciales contenidos en un determinado rango de frecuencias, comprendido entre una frecuencia de corte superior y otra inferior.

**Filtro multibanda:** Es que presenta varios rangos de frecuencias en los cuales hay un comportamiento diferente.

**Filtro variable:** Es aquel que puede cambiar sus márgenes de frecuencia.

### 5. VERIFICACIÓN A TRAVÉS DE UNA APLICACIÓN DEL MUESTREO PASABANDA

Utilizando Matlab, se presenta el programa y las graficas construidas para una aplicación del muestreo Pasabanda, empleado para señales en las bandas más altas del espectro.

En este ejemplo se construye una señal inicial, cuyo contenido espectral incluye diferentes valores de frecuencia (10 Hz, 30 Hz y 50 Hz), como se aprecia en la Figura 4; la cual, a través de una señal portadora (de valor 1000 Hz) como se observa en la Figura 5, se modula con el fin de trasladar en el espectro la señal inicial, esta modulación se muestra en la Figura 6.

Debido a las restricciones del software y el hardware utilizados, el ejemplo se trabaja en frecuencias bajas; sin embargo el concepto se aplica a altas frecuencias.

Esta señal modulada es el punto de partida de la aplicación del muestreo pasabanda por tanto se utilizará una señal muestreadora teniendo en cuenta el criterio de Nyquist Shannon donde la frecuencia de muestreo es dos veces el ancho de banda (2BW). La frecuencia de muestreo de la señal será:

$$\begin{aligned}
 f_s &= 2 (F \text{ máx} - F \text{ mín}) \\
 f_s &= 2 (1050 \text{ Hz} - 950 \text{ Hz}) \\
 f_s &= 200 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

En la Figura 7 se observa la señal muestreadora con el valor de  $f_s$  calculado.

El producto de muestrear la señal pasabanda con la señal muestreadora se observa en la Figura 8, cuyo espectro, muestra un espejo en la frecuencia central de 200 Hz, de las componentes de la señal pasabanda con frecuencia

central de 1000 Hz, característica que también se aprecia en la Figura 8. Lo anterior permite verificar el cumplimiento del criterio de Nyquist Shannon para señales ubicadas en la parte más alta del espectro.

A continuación se presenta el programa construido y las graficas obtenidas para la aplicación descrita, vale la pena anotar que primero se incluye el código e inmediatamente después el correspondiente resultado en forma grafica.

```

% Se crea la señal a muestrear
npuntos=16384;
t1 = 0:1/npuntos:1; % Intervalo de Muestreo
t = 0:1/npuntos:1;
A = 1; % Amplitud de la Señal
fn =10; % Frecuencia de la Señal
fp= 1000.0; % Frecuencia de la Señal portadora
Sig=A*(sin(2*pi*fn*t)+sin(2*pi*3*fn*t)+cos(2*pi*5*fn*t)); % Señal a Muestrear
subplot(2,2,1)
plot(t,Sig);
axis([0,0.25,-4,4])
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Amplitud de la Señal')
title('Señal a Modular');
grid;
esp1=fft(Sig);
subplot(2,2,2)
plot(abs(esp1))
xlabel('Frecuencia [Hz]');
title('Espectro señal a Modular');
axis([0,80,0,5000]);
grid on;
    
```

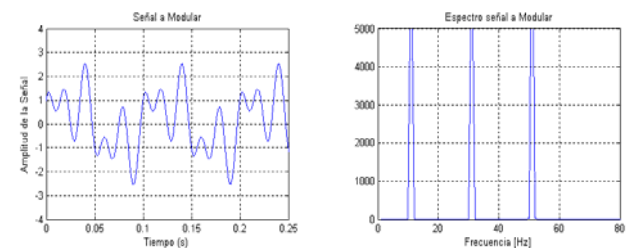


Figura 4. Señal con varias componentes de frecuencia y su espectro

```

Por= 12*A* sin(2*pi*fp*t1);
subplot(2,2,3)
plot(t1,Por);
xlabel('Tiempo (s)');
title('Señal Portadora');
axis([0,0.01,-15,15])
grid;
    
```

```

esp2=fft(Por);
subplot(2,2,4)
plot(abs(esp2))
title('Espectro Señal Portadora');
    
```

```
xlabel('Frecuencia [Hz]');
%title('Espectro portadora');
axis([0,2000,0,1500]);
grid on;
```

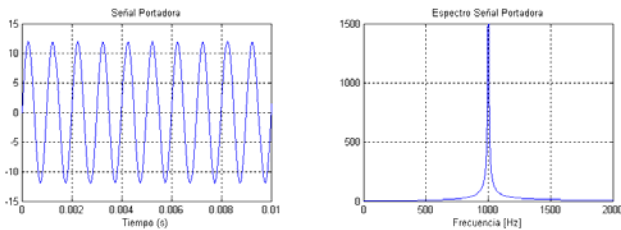


Figura 5. Señal portadora y su espectro

```
Mod=Sig.*Por;
figure(2);
subplot(2,2,1)
plot(t1,Mod);
axis([0.02,0.05,-35,35])
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Amplitud de la Señal')
title('Señal Modulada');
grid on;

esp3=fft(Mod);
subplot(2,2,2)
plot(abs(esp3))
ylabel('Amplitud de la Señal')
title('Espectro de la Señal Modulada');
xlabel('Frecuencia [Hz]');
axis([750,1250,0,10000]);
grid on;
```

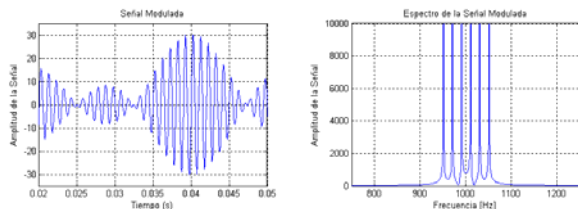


Figura 6. Señal pasabanda y su espectro

```
A1 = 1;
fs=200;
w = 2*pi*fs;
%t2 = 0:1/63535:(0.25-1/65535);
t2=t1;
sq = A1*square(w*t1);
subplot(2,2,3);
plot(t2,sq);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Amplitud de la Señal Muestreadora')
title('Señal Muestreadora');
axis([0,0.05,-2,2]);
grid on;

esp4=fft(sq);
subplot(2,2,4);
```

```
plot(abs(esp4));
ylabel('Amplitud del Espectro')
title('Espectro de la Señal Muestreadora');
xlabel('Frecuencia [Hz]');
axis([0,2500,0,10000]);
grid on;
```

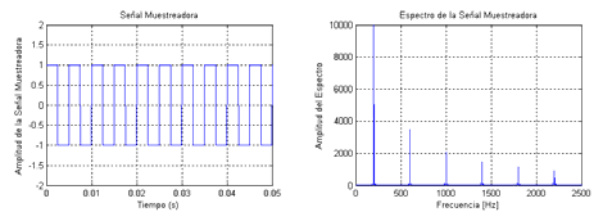


Figura 7. Señal muestreadora y su espectro

```
size(Mod); % tamaño del vector Mod
size(sq); % tamaño del vector sq
Ms=Sig.*sq;
figure(3);
subplot(1,2,1);
plot(t,Ms);
ylabel('Amplitud del Muestreada pasabanda')
title('Señal Muestreada pasabanda');
xlabel('Tiempo (s)');
axis([0,0.05,-5,5]);
grid on;

esp5=fft(Ms);
subplot(1,2,2)
plot(abs(esp5));
ylabel('Amplitud del Espectro')
title('Espectro de la Señal Muestreada pasabanda');
xlabel('Frecuencia [Hz]');
axis([0,550,0,10000]);
grid on;
```

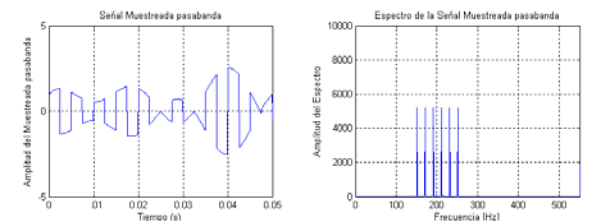


Figura 8. Señal pasabanda muestreada y su espectro

El siguiente paso en el procesamiento de este tipo de señales es la reconstrucción de la señal muestreada, que para este caso se realizaría, por ejemplo, utilizando un filtro pasabanda como al que se hace referencia en el numeral 4 del artículo y cuyas frecuencias de corte se pueden definir entre 100 y 300 Hz.

## 6. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos al muestrear señales pasabanda, que en la aplicación representan señales ubicadas en la parte alta del espectro, verifican claramente el criterio de

Nyquist Shannon, facilitando las necesidades de muestreo a frecuencias mucho más bajas que las contenidas en la señal original. Igualmente garantizan la reconstrucción de dicha señal a partir de las componentes espectrales obtenidas del filtrado pasabanda.

Aunque en el artículo no se presentaron los desarrollos matemáticos, la aplicación presentada usando MATLAB entrega las componentes espectrales de cada una de las señales generadas y obtenidas de las operaciones necesarias, por medio de la función FFT (fast Fourier Transformer) que permite representar las componentes de frecuencia de señales discretas.

La modulación en amplitud (traslado en el espectro de una señal) permitió que se desarrollara de forma rápida la aplicación y de este modo ubicarla en una parte del espectro que presentara una mejor visualización de los resultados.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

[1] <http://prof.usb.ve/tperez/docencia/2422/contenido/muestreo/muestreo.htm>

[2] Electrónica General y Aplicada – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Cuyo

[3] [http://es.wikipedia.org/wiki/Aliasing#Criterio\\_de\\_Nyquist](http://es.wikipedia.org/wiki/Aliasing#Criterio_de_Nyquist)

[4] <http://commons.wikimedia.org/wiki/Aliasing>

[5] <http://prof.usb.ve/tperez/docencia/2422/contenido/muestreo/muestreo.htm>

[6] STREMLER, Ferrel G. *Sistemas de Comunicación*, Fondo Educativo Interamericano, S.A de C.V. 1989, pp. 127 - 128

[7] RODRIGUEZ V, Luis Alfonso. *Muestreo de señales pasabanda*. Revista Scientia et Technica, No 12, Abril 2000, pp. 55 - 60