DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS OBLICUAS

Minimal distance between two oblique straight lines

JORGE ELIECER ROJAS CANO
Matemático Universidad Nacional.
Magister en Matemáticas
Universidad Nacional
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira

FERNANDO MESA
Licenciado en matemáticas UTP
Especialista en docencia universitaria
Universidad Cooperativa de Colombia
Magister en instrumentación física UTP
Profesor titular
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

RESUMEN

Dos rectas en R^3 se llaman oblicuas o cruzadas si son no paralelas y no se intersectan.
El objetivo de esta nota es encontrar los dos puntos de dos rectas oblicuas que minimizan la distancia entre dos puntos arbitrarios de las rectas, es decir, hallar esa distancia mínima entre ellas.
Se prueba, además, que distancia mínima es la distancia entre dos planos paralelos que contienen ambas rectas.

PALABRAS CLAVES: recta**,** plano, producto vectorial, independencia lineal, producto escalar, intersectan.

ABSTRACT

Two straight lines in R^3 are named oblique or crossed if they are not paralleled and not intersected.
The objective of this note is to find two points of two oblique straight lines that minimize the distance between the two straight lines.
It's proven, besides, that the minimum distance is the distance between two parallel planes that contain both straight lines.

KEYWORDS: *plane, straight line, vectorial product, linear independence, scalar product, norm, intersection*

1. INTRODUCCIÓN

El problema de la distancia mínima entre dos rectas oblicuas L_1, L_2 entraña un proceso de minimización el cual queda soslayado o encubierto en las definiciones a las que recurren algunos textos de cálculo. Por ejemplo, en [1] se lee la definición: "por la distancia mínima entre las dos rectas L_1, L_2 se entiende la distancia perpendicular entre planos P_1 y P_2", estos planos son paralelos y contienen las rectas, ver figura 1. Una definición semejante se encuentra en [2].

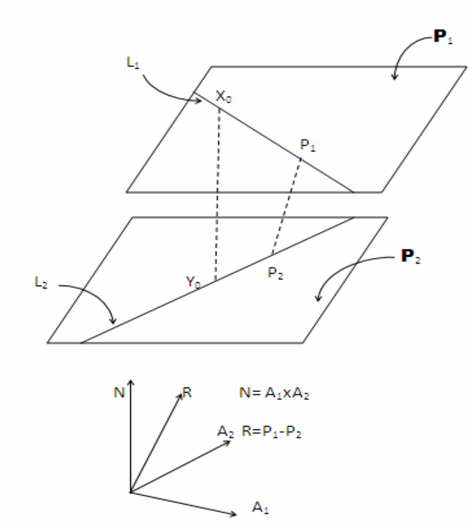

Figura 1. P_1 y P_2 planos paralelos que contienen las rectas L_1 y L_2.

Fecha de Recepción: 5 de Julio de 2008.
Fecha de Aceptación: 27 de Julio.

En [3] la aproximación al problema es una variante análoga a las definiciones anteriores:
"Nos planteamos el problema de encontrar la distancia más corta que existe entre estas dos rectas"…" La idea general es "meter" L_1 en un plano P_1 de modo que la recta L_2, queda paralela a este plano; logrado esto, la distancia procurada no es más que la distancia de un punto (cualquiera) de la recta L_2 al plano P_2".
Enfocamos el asunto como un problema típico de minimizar una función de dos variables y hallamos, explícitamente, los puntos X_o, Y_o, $X_o \in L_1$, $Y_o \in L_2$ que minimizan la distancia entre dos puntos arbitrarios de las rectas.
Con la deducción de (1.8) se justifican teóricamente las definiciones y procesos de carácter intuitivo que hemos enunciado, y la definición, geométricamente más precisa, mediante la noción de "la transversal más corta" que aparece en [4], (ver figura 2 tomada del mismo texto).

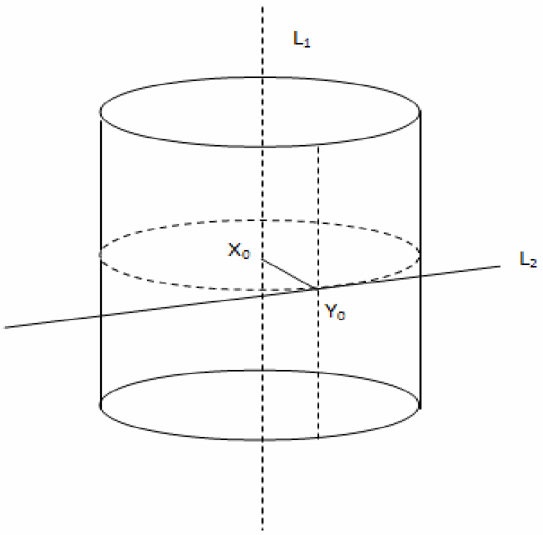

Figura 2. La transversal más corta perpendicular $\overrightarrow{X_0Y_0}$ L_1 y L_2.

En la deducción se utilizan las identidades vectoriales

$$(A\times B)\cdot(C\times D)=(A\cdot C)(B\cdot D)-(A\cdot D)(B\cdot C) \qquad (1.1)$$

de la cual se deducen las identidades:

$$\|A\times B\|^2=\|A\|^2\|B\|^2-(A\cdot B)^2$$

$$\mathrm{N}\cdot(\mathrm{A}_2\times R)=(A_1\cdot A_2)(R\cdot A_2)-\|A_2\|^2(R\cdot A_1) \qquad (1.2)$$

$$\mathrm{N}\cdot(\mathrm{A}_1\times R)=\|A_1\|^2(R\cdot A_2)-(A_1\cdot A_2)(R\cdot A_1) \qquad (1.3)$$

en las cuales $\mathrm{N}=A_1\times A_2$,

y la identidad "cab menos bac":

$$A\times(B\times C)=(C\cdot A)B-(B\cdot A)C,$$

de la cual se deducen las

identidades:

$$A_2\times(A_1\times A_2)=\|A_2\|^2A_1-(A_1\cdot A_2)A_2 \qquad (1.4)$$

$$A_1\times(A_1\times A_2)=(A_1\cdot A_2)A_1-\|A_1\|^2A_2 \qquad (1.5)$$

2. CONTENIDO

Sean ahora dos rectas L_1, L_2 en R^3 definidas vectorialmente por:

$X(s)=P_1+sA,\ Y(t)=P_2+tA_2$, respectivamente donde $P_1 \neq P_2$, y A_1, A_2 son no nulos y no colineales, s, t $\in \Re$

Sea $f(s,t)=\|X(s)-Y(t)\|^2$, el cuadrado de la distancia entre los puntos arbitrarios de L_1 y L_2.

Es claro que f es no acotada. Para minimizar f se encuentran primero sus puntos críticos.

Como $f(s,t)=\|R+sA_1-tA_2\|^2,\ R=P_1-P_2$

$$f(s,t)=\|A_1\|^2s^2+\|A_2\|^2t^2+2s(R\cdot A_1)-2t(R\cdot A_2)-2st(A_1\cdot A_2)+\|R\|^2,$$

Se deduce,

$$\frac{df}{ds}=2\|A_1\|^2s-2(A_1\cdot A_2)t+2(R\cdot A_1)$$

$$\frac{df}{dt}=-2(A_1\cdot A_2)s+2\|A_2\|^2t-2(R\cdot A_2)$$

Al hacer $\frac{df}{ds}=\frac{df}{dt}=0$, se encuentra el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\|A_1\|^2 s-(A_1\cdot A_2)t=-(R\cdot A_1)\\ -(A_1\cdot A_2)s+\|A_2\|^2t=R\cdot A_2\end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $\|N\|^2$, $N=A_1\times A_2$, que es diferente de cero debido a la independencia lineal de A_1 y A_2.

De acuerdo con la Regla de Cramer la única solución (s_0,t_0) del sistema está dado por:

$$s_0=\frac{(A_1\cdot A_2)(R\cdot A_2)-\|A_2\|^2(R\cdot A_1)}{\|N\|^2},$$

$$t_0=\frac{\|A_1\|^2(R\cdot A_2)-(A_1\cdot A_2)(R\cdot A_1)}{\|N\|^2}.$$

Usando las identidades (1.2) y (1.3) se obtiene que:

$$s_0 = \frac{N\cdot(A_2\times R)}{\|N\|^2} \quad , \quad t_0 = \frac{N\cdot(A_1\times R)}{\|N\|^2}$$

Es evidente que $\|X_0 - Y_0\| \le \|X(s) - Y(t)\|$,
para todo $s, t,$ reales, donde
$X_0 = P_1 + s_0 A_1,\ Y_0 = P_2 + t_0 A_2$.

Consideremos ahora los planos paralelos P_1, P_2 definidos vectorialmente por
$X\cdot N = N\cdot P_1$, $Y\cdot N = N\cdot P_2$, respectivamente.
Es fácil ver qué $L_1 \subset P_1, L_2 \subset P_2$, y que la distancia entre los planos es $\frac{|R\cdot N|}{\|N\|}$.

Veamos que $\|X_0 - Y_0\| = \frac{|R\cdot N|}{\|N\|}$.

Los vectores N, A_1, A_2 son linealmente independientes y por tanto forman base de R^3.
Así existen escalares únicos $\alpha_0, \beta_0, \delta_0$ tales que

$$R = \alpha_0 N + \beta_0 A_1 + \delta_0 A_2 \qquad (1.6)$$

De la cual se deduce que $\alpha_0 = \frac{|R\cdot N|}{\|N\|^2}$, pues
$N\cdot A_1 = N\cdot A_2 = 0$. Además de (1.6) se obtiene:

$$R\times A_2 = \alpha_0 (N\times A_2) + \beta_0 N \ . \qquad (1.7)$$

Al multiplicar escalar mente ambos lados de (1.7) por N y teniendo en cuenta (1.4) se deduce que $\beta = -S_0$; de la misma manera se deduce que $\delta_0 = t_0$, utilizando ahora (1.5).

$$X_0 - Y_0 = \alpha_0 N$$
$$\|X_0 - Y_0\| = \frac{\|R\cdot N\|}{\|N\|^2}, \qquad (1.8)$$

De acuerdo con la identidad (1.4) al multiplicar escalarmente ambos lados de (1.4) por N se deduce que $\beta_0 = -s_0$; de la misma manera se deduce que $\delta_0 = t_0$.

De las igualdades $\begin{cases} R = \alpha_0 N - s_0 A_1 + t_0 A_2, \\ X_0 - Y_0 = R + s_0 A_1 - t_0 A_2, \end{cases}$

Se obtiene $X_0 - Y_0 = \alpha_0 N, \|X_0 - Y_0\| = \frac{|R\cdot N|}{\|N\|}$.

3. UN EJEMPLO NUMÉRICO

En el ejemplo 6 de la página 843 del Cálculo de Leithold, 7ª edición, sean:

$$L_1 : P_1 = (-2,3,\ -4),\quad A_1 = (3,\ -1,11)$$
$$L_2 : P_2 = (2,-1,4),\quad A_2 = (3,8,-7).$$

Entonces con
$N = A_1\times A_2 = 27(-3,2,1),\quad R = P_1 - P_2 = (-4,4,-8)$, se deducen:

$$s_0 = \frac{128}{189}, \qquad t_0 = \frac{38}{189}$$

$$X_0 = \left(\frac{6}{189}, \frac{439}{189}, \frac{652}{189}\right) \quad , \quad Y_0 = \left(\frac{492}{189}, \frac{115}{189}, \frac{490}{189}\right)$$

y $\quad X_0 - Y_0 = \frac{6}{7}(-3,2,1);\ \|X_0 - Y_0\| = \frac{|R\cdot N|}{\|N\|} = \frac{6}{7}\sqrt{14}$

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Stein Sherman, “Calculo y Geometría Analítica”, 5ª edición, McGraw-Hill pág. 859.

[2] Leithold, Luis, “El Cálculo”, 7ª edición, Oxford University Press, pág. 843.

[3] Pita Ruiz, Claudio, “Cálculo Avanzado”
, Prentice Hall, pág. 65.

[4] Pfranger, Rato, “Geometría vectorial”, Universidad de Antioquia.