# APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LERAY - SCHAUDER A UN PROBLEMA DE CONTORNO

## Application of Leray – Schauder's theorem a boundary problem

**PEDRO PABLO CÁRDENAS A.**
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

**JHON JAIRO LEÓN S.**
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
leonj@utp.edu.co

**FERNANDO MESA**
Licenciado en Matemáticas y Física.
Magister en Instrumentación Física.
Profesor Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

**RESUMEN**

En el presente artículo se muestra una aplicación de existencia de solución para un problema de contorno usando el teorema de Leray-Schauder. Bajo condiciones apropiadas, se prueba la existencia y unicidad de un problema no lineal de segundo orden.

**PALABRAS CLAVES:** Contorno, punto fijo, Leray- Schauder.

**ABSTRACT**

This article it show an application of the existence of solution for a boundary problem using the Leray-Schauder theorem. Under proper conditions, we prove the existence and uniqueness for a non-linear second order.

**KEYWORDS:** Boundary, fixed point, Leray-Schauder.

## 1. INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones importantes del teorema de punto fijo de Leray-Schauder es la de resolver problemas de contorno no lineales de segundo orden y orden superior.

Se mostrara en este trabajo que el problema

$$\begin{cases} u'' + g(t,u) = 0 \\ u(0) = u_0,\ u(T) = u_T \end{cases}$$

bajo ciertas condiciones tendrá solución única en cierto espacio.

## 2. TEOREMA DE LERAY - SCHAUDER

**Teorema 2.1 (**Leray-Schauder**).** Sea $E$ un espacio de Banach y sea $T: E \times [0,1] \to E$ una aplicación compacta tal que $T(x,0) = 0,\ \forall\, x \in E$. Si $\exists\, M \in \mathbb{R}: \forall\, x \in E$ que verifique $T(x,\alpha) = x$ para algún $\alpha \in [0,1]$ se tiene que $\|x\| < M$, entonces $\exists\, x \in E$ tal que $T(x,1) = x$.

Para ver los detalles de la demostración de este teorema, se invita al lector ver [1].

Es importante recordar que el teorema de punto fijo de Schauder es la generalización del teorema de punto fijo de Brouwer en dimensión infinita; por ello se recuerda dicho teorema importante de la topología. Recordemos entonces dicho teorema:

**Teorema 2.1. (Brouwer).** Considérese *H Hilbert* de dimensión finita, $C \subset H$ un conjunto compacto, convexo no vacío. Si $f: C \to C$ es una función continua, entonces tiene un punto fijo. [1]

**Teorema 2.2. (Schauder).** Sea $C$ un subconjunto convexo y compacto en $E$, espacio de Banach. Si $T: C \to C$ es continuo, entonces $T$ tiene un punto fijo. [1]

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

Ahora, se hace mención de un corolario del teorema de Leray-Schauder que será de gran importancia para lo que se pretende hacer.

**Corolario 2.1.** Sean $E$ un espacio de Banach y $K: E \to E$ una aplicación compacta. Si $\exists\, M \in \mathbb{R}: \forall\, x \in E$ que cumpla $x = \sigma K x$ para algún $\sigma \in [0,1]$ se tiene que $\|x\| < M$, entonces *K* tiene al menos un punto fijo.

**Demostración.** Tomando $T: E \times [0,1]$ como $T(x,t) = tKx$, *T* cumple las hipótesis del teorema, luego

$$\exists\, x \in E: x = T(x,1) = Kx$$

■

Para otra demostración sin usar el teorema anterior, se invita al lector ver [1].

## 3. PROBLEMA DE CONTORNO

Considerese el problema de segundo orden

$$\begin{cases} u'' + g(t,u) = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \end{cases} \qquad (3.1)$$

con $g = [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\frac{\partial g}{\partial u} \le 0$. Entonces (3.1) tiene solución única en $H^2[0,T]$.

**Demostración.** Primero nótese que si

$$H^2[0,T] \cap H_0^1[0,T]$$

se tiene que

$$\|w'\|_2^2 = -\int_0^T w'' w,$$

luego, usando la desigualdad de Cauchy-Schawarz,

$$\|w'\|_2^2 \le \|w''\|_2 \|w\|_2$$

Además, por la desigualdad de Poincaré, se sabe que

$$\exists c_1 \in \mathbb{R}: \|w\|_2 \le c_1 \|w'\|_2,$$

de donde, usando las dos desigualdades anteriores se deduce que

$$\|w'\|_2 \le c_1 \|w''\|_2$$

y también

$$\|w\|_2 \le c_1 \|w''\|_2$$

De donde se sigue que

$$\|w\|_{H^1} \le c\|w''\|_2 \qquad (3.2)$$

con $c = \sqrt{c_1^4 + c_1^2}$.

Por otro lado, si se tiene que $v \in H^1[0,T]$ y se considera el problema

$$\begin{cases} u'' = -g(t,v) \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \end{cases}$$

Claramente tiene única solución en el conjunto

$$H^2[0,T] \subseteq H^1[0,T]$$

Por otro lado, si se define el conjunto
$K: H^1[0,T] \to H^1[0,T]$

Como $Kv = u$, siendo *u* dicha solución, *K* está bien definida.

Se verifica ahora que *K* es continuo. En efecto,

Sean $u, v \in H^1[0,T]$ tal que $\overset{H^1}{u \to v}$, luego $u \to v$ uniformemente ya que

$$H^1[0,T] \subset C[0,T]$$

Por otro lado,

$$Ku - Kv \in H^2 \cap H_0^1[0,T]$$

Así, por la ecuación (3.2) se tiene

$$\|Ku - Kv\|_{H^1} \le c\|(Ku)'' - (Kv)''\|2 = c$$
$$\|g(\cdot,u) - g(\cdot,v)\|_2 \to 0$$

Se verifica a continuación que *K* es compacto. En efecto, sean $M \in \mathbb{R}$ y $u \in H^1[0,T]$: $\|u\|_{H^1} \le M$ y sea

$$\varphi(t) = \frac{u_T - u_0}{T} t + u_0$$

Luego,

$Ku - \varphi \in H^2 \cap H_0^1[0,T]$,

Entonces,

$\|Ku - \varphi\|_{H^1} \leq c\|(Ku)'' - \varphi''\|2 = c\|(Ku)''\|$
$= c\|g(\cdot,u)\|_2 \leq C_M$

Siendo $C_M$ una constante que depende únicamente de *M*. por lo tanto

$\|Ku\|_{H^1} \leq \|Ku - \varphi\|_{H^1} + \|\varphi\|_{H_1} \leq C_M + \|\varphi\|_{H_1} \leq \check{C}_M$

Además,

$$\|(Ku)''\|_2 \leq \frac{C_M}{c},$$

Entonces

$\|Ku\|_{H^2} \leq \hat{C}_M$

Luego, con la inclusión de $H^2[0,T]$ en $H^1[0,T]$ es compacta, *K* resulta compacto.

Sea $w \in H^1$[0,T]: w=$\varphi Kw$ con $\varphi \in [0,1]$.

Entonces *w* es solución del problema

$$\begin{cases} u'' = \sigma g(t,u) \\ u(0) = \sigma u_0, \ u(T) = \sigma u_T \end{cases}$$

Sea

$$\varphi_\sigma(t) = \sigma\left(\frac{u_T - u_0}{T}t + u_0\right)$$

Y defínase

$S_\sigma u = u'' + \sigma g(t,u)$

Sea $u, v \in H^2[0,T]$ con $u = v$ en el borde, luego

$$-\int_0^T (S_\sigma u - S_\sigma v)(u - v) =$$

$$= \int_0^T (u-v)'(u-v) - \sigma\int_0^T \big(g(t,u) - g(t,v)\big)(u-v)$$

$$= \|(u-v)'\|_2^2 - \sigma\int_0^T \frac{g(t,u) - g(t,v)}{u-v}(u-v)^2$$

Como por hipótesis se tenía $\frac{\partial g}{\partial u} \leq 0$, entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$\|u' - v'\|_2^2 \leq \|S_\sigma u - S_\sigma v\|_2 \|u - v\|_2$

Luego, por Poincaré y razonando como antes,

$\exists \tilde{c}: \|u - v\|_{H^1} \leq \tilde{c}\|S_\sigma u - S_\sigma\|_2$

Entonces, tomando $u = v$ y $v = \varphi_\sigma$, se tiene que

$\|\varphi_\sigma\|_\infty = \sigma\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$

Por lo tanto,

$\|w\|_{H^1} \leq \|w - \varphi_\sigma\|_{H^1} + \|\varphi_\sigma\|_{H^1} \leq m +$
$\sigma\|\varphi\|_{H^1} \leq m + \|\varphi\|_{H^1} \leq \tilde{m}$

con $\tilde{m}$ independiente de *w* y $\sigma$.

Así, por el corolario 2.1, *K* tiene un punto fijo. Luego, el problema (3.1) tiene solución.

Para ver la unicidad, se supone que *u* y *v* son soluciones del problema, entonces

$$S_\sigma u = S_\sigma v = 0$$

Por lo tanto,

$\|u - v\|_{H^1} \leq \tilde{c}\|S_\sigma u - S_\sigma v\| = 0$

De donde se sigue que $u = v$.

■

## 4. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando el teorema de Leray-Schauder , la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de un problema de contorno no lineal.

Utilizando el teorema (2.1) y el corolario (2.1), se probó que el operador *T* definido para el problema (3.1) tenía un punto fijo, el cual dio existencia de solución.

**AGRADECIMIENTOS**

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

**BIBLIOGRAFIA**

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.

[4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.

[5] MORTON K.W. & Mayers D.F. (1981) Numerical Solutions of Partial Diferential Equations. an introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] HUBBARD, F. Numerical solution of partial differential equations – II. AP.