

APLICACIÓN DE LA WAVELET HAAR PARA RECONSTRUIR LA FUNCIÓN $f(t)=t$ SOBRE EL INTERVALO $[-3,3]$ EN DIFERENTES GRADOS DE RESOLUCIÓN

Implementation of the wavelet HAAR to reconstruct the function $f(t) = t$ On the range $[-3,3]$ different degrees of resolution

RESUMEN

En este artículo, se estudian los sistemas Wavelets de primera generación como lo es la Wavelet Haar (la más antigua y simple de todas), con sus respectivas características; definiendo para la Haar, la función escala y la función Wavelet, permitiendo (en este caso particular) el análisis y representación de la función $f(t) = t$ en los diferentes espacios generados (V_0, V_1, W_0, W_1), obteniendo resultados que indican que dicha Wavelet es un "BUEN" sistema Wavelet.

Este trabajo es un aporte pedagógico y didáctico para el aprendizaje en la aplicación de los "Sistemas Wavelet" en su conceptualización básica.

PALABRAS CLAVES: Función, Wavelet, Haar, Sistema.

ABSTRACT

In this article, we study systems Wavelet first generation as is the Wavelet Haar (the oldest, simplest all), with their respective features; Haar for defining the role and function Wavelet scale, which allows (this particular case) analysis and representation of the function $f(t) = t$ in the various spaces generated (V_0, V_1, W_0, W_1), getting results indicating that such Wavelet is a "GOOD" Wavelet system.

This paper is a contribution to teaching and learning in teaching the implementation of the "Wavelet Systems" in its basic concept.

KEYWORDS: Function, Wavelet, Haar, System.

1. INTRODUCCIÓN

En el mundo de las nuevas tecnologías es indispensable la reconstrucción, modelamiento, etc, de conjuntos finitos de datos como aspecto neurálgico en diferentes aplicaciones. Este grupo finito de datos puede ser modelado como una función $f(t)$ en términos de contracciones y dilataciones de una función de escalamiento $\Phi(t)$ y una función Wavelet $\Psi(t)$. Es allí donde adquieren gran relevancia las Wavelets frente a otros métodos; ya que su uso garantiza características como confiabilidad, fidelidad y rapidez.

2. TRANSFORMADA WAVELET

Cabe Recordar que La transformada Wavelet (también denominada ondícula, ondeleta u ondita) representa una señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas de

JIMMY ALEXANDER CORTÉS OSORIO.

Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira.
jcortes@utp.edu.co

HUGO BALDOMIRO CANO GARZÓN.

Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Especialista en Gerencia de Tecnología.
Convenio UTP - EAN.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Auxiliar.
Universidad Tecnológica de Pereira.
hbcano@utp.edu.co

JOSÉ ANDRÉS CHAVES OSORIO.

Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Especialista en Pedagogía.
Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira.
jachaves@utp.edu.co

una onda finita que tiene un valor promedio cero¹ (denominada Wavelet madre). Todas las transformaciones wavelets se pueden considerar formas de representación en tiempo-frecuencia y, por tanto, están relacionadas con el análisis armónico. Las transformadas wavelets son un caso particular de filtro de respuesta finita al impulso. Las wavelets, continuas o discretas, como cualquier función L^2 , responden al principio de incertidumbre de Hilbert (conocido por los físicos como principio de incertidumbre de Heisenberg), el cual establece que producto de las dispersiones obtenidas en el espacio directo y en el de las frecuencias no puede ser más pequeño que una cierta constante geométrica.

2.1 Aplicaciones de la Transformada Wavelet

¹ Revista Scientia et Technica Año XIII, No 37, Diciembre 2007, página 133 [1].

La teoría de wavelets está relacionada con campos muy variados. Principalmente la transformada Wavelet discreta se utiliza para la codificación de señales; mientras la continua se utiliza en el análisis de señales; como consecuencia de esta clasificación, la versión discreta de este tipo de transformada se utiliza fundamentalmente en ingeniería e informática, mientras que la continua se utiliza sobre todo en la física. Este tipo de transformadas están siendo cada vez más empleadas en un amplio campo de especialidades, a menudo sustituyendo a la transformada de Fourier. Se puede observar este desplazamiento en el paradigma en múltiples ramas de la física, como la dinámica molecular, los cálculos ab initio, la astrofísica, la geofísica de los sismos, la óptica, el estudio de las turbulencias y la mecánica cuántica, así como en otros campos muy variados como el procesamiento digital de imágenes, el procesamiento de señales en general, el estudio del ADN, la meteorología, el reconocimiento de voz, el tratamiento de gráficos por computador, en el campo de biometría, y otros análisis como el multifractal, el de sangre, el de proteínas y el de electrocardiogramas, entre otros².

2.3 Transformadas Wavelets de primera generación

Estas Transformadas (Sistemas) Wavelets de primera generación, son todas aquellas funciones que se obtienen sólo por traslaciones enteras y escalamientos de una única función Wavelet $\Psi(t)$, denominada Wavelet generadora o Wavelet madre, la cual da origen a una familia de funciones (llamada Set de expansión Wavelet) de la forma que se indica en la Ecuación 1.

$$\begin{aligned}\Phi_{j,k}(t) &= 2^{\frac{j}{2}} \Phi(2^j t - k) \\ \Psi_{j,k}(t) &= 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k)\end{aligned}\quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Ecuación 1. Set de expansión Wavelet

En la anterior ecuación el factor $2^{j/2}$ mantiene una norma constante independiente de la escala j . La Wavelet madre $\Psi(t)$, siempre trae asociada consigo una función denominada escala $\Phi(t)$; las cuales permitirán obtener (o reproducir) cualquier función o señal $f(t)$, que pueda representarse tal como la que muestra en la Ecuación 2.

$$f(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

Ecuación 2. Función $f(t)$

De tal modo que con la función Wavelet madre, la función escala, o la combinación de ambas es posible obtener una aproximación de la función $f(t)$, mediante la forma que se observa en la Ecuación 3.

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \Phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \Psi(t)$$

Ecuación 3. Aproximación de la función $f(t)$

2.3.1 Características de las Transformadas Wavelets

El Set de expansión Wavelet no es único, existen muchos y muy diferentes sistemas Wavelet, pero todos presentan las siguientes características:

1. Un sistema Wavelet puede describirse de forma "amigable", como un conjunto de ladrillos (que para cada sistema pueden tener diferente forma), los cuales sirven para reconstruir o representar una función o señal. Este conjunto es una expansión bi-dimensional $L^2(\mathbb{R})$, que suele servir de base para cualquier clase de señal de una o más dimensiones.
2. La expansión Wavelet entrega una localización tiempo-frecuencia instantánea de la señal, representación que puede explicarse como un pentagrama musical, donde la localización y forma de la figura musical indica cuando ocurre el tono y cual es su frecuencia. Esto indica que la mayor parte de la energía de la señal se encuentra bien representada por uno pocos coeficiente $d_{j,k}$; mientras un coeficiente de Fourier representa un componente de Fourier que dura todo el tiempo en que se extiende la señal, un coeficiente de expansión Wavelet representa un componente bien definido en un intervalo de tiempo, lo cual significa que un coeficiente Wavelet es en sí bien localizado en el tiempo.
3. Los sistemas Wavelets satisfacen las condiciones de multiresolución. Lo cual quiere decir que si un conjunto de señales puede representarse por una suma de $\Phi(t-k)$ con k que pertenece a \mathbb{Z} , un conjunto más amplio de señales (que incluye el conjunto original) puede representarse por una suma $\Phi(2t-k)$ con k que pertenece a \mathbb{Z} .
4. Los coeficientes de más baja resolución pueden calcularse a partir de los coeficientes de más alta resolución, mediante un algoritmo en forma de árbol, llamado banco de filtros. Lo anterior permite un cálculo bastante eficiente de los coeficientes de expansión (también conocida como la transformada discreta Wavelet.
5. El tamaño de los coeficientes de expansión Wavelet disminuye rápidamente con j y k . debido a esta característica la Wavelet se considera una herramienta muy efectiva para la compresión y limpieza (denoising) de señales.
6. Las wavelets son ajustables y adaptables. Debido a la gran cantidad y variedad de wavelets que existen, ellas pueden diseñarse para adaptarse a una aplicación particular.
7. La generación de wavelets y el cálculo de la transformada continua Wavelet se realizan adecuadamente por un computador, ya que finalmente en

² <http://es.wikipedia.org/wiki/Wavelet> [2].

la aplicación de la transformada los cálculos se remiten simplemente a multiplicaciones y sumas³.

3. WAVELET HAAR

Dentro de las wavelets más famosas y utilizadas se encuentra la Haar, esta Wavelet es también la más antigua y sencilla de utilizar; para aprender a aplicarla es necesario partir de la definición de la funciones Haar escala y Haar Wavelet, tal como se describe a continuación.

3.1 Función Haar escala

La función de escalamiento $\Phi(t)$ se define como⁴:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{Si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La cual se muestra en la Figura 1.

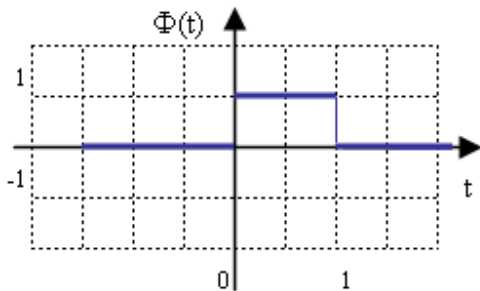


Figura 1. Función Haar escala

Igualmente se definen un conjunto de funciones de escalamiento en términos de las traslaciones enteras realizadas a la función $\Phi(t)$, definidas como:

$$\Phi_k(t) = \Phi(t - k) = \begin{cases} 1, & \text{Si } t_1 = k \leq t < k+1 = t_2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \Phi \in L^2(\mathbb{R})$$

La anterior función genera un subespacio V_j contenido en $L^2(\mathbb{R})$; por tanto cualquier función $f(t)$ que se encuentre en dicho subespacio puede ser representada como una combinación lineal del conjunto de funciones $\Phi_k(t)$ y se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_k c_{j,k} \Phi_{j,k}(t), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Siendo C_k los coeficientes, cuyo calculo se realiza si se cumple la condición de ortonormalidad de $\Phi_k(t)$; quedando definidos como:

³ Características tomadas y adaptadas de Tesis de grado [4] página 60.
⁴ Tesis de grado [4].

$$c_{j,k} = \langle f(t), \Phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Phi_{j,k}(t) dt$$

3.2 Función Haar Wavelet

La función de escalamiento $\Psi(t)$ se define como:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{Si } 0 \leq t < 0,5 \\ -1, & \text{Si } 0,5 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La cual se muestra en la Figura 2.

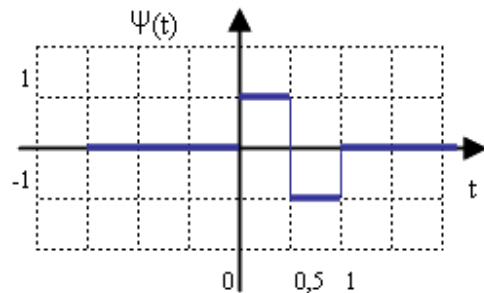


Figura 2. Función Haar Wavelet

De forma análoga a la función de escalamiento, se define una función Wavelet, que corresponde a la misma función pero desplazada en el tiempo por una constante k , así:

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{Si } k \leq t < k+0,5 \\ -1, & \text{Si } k+0,5 < t < k+1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \Psi \in L^2(\mathbb{R})$$

Las características de una señal se pueden describir mejor al no incrementar el tamaño del espacio de las funciones de escalamiento (V_j), si no definiendo un espacio W_j generado por el desplazamiento de la función Wavelet $\Psi(t)$. Donde cualquier función $f(t)$ que pertenece a W_j puede ser representada como:

$$f(t) = \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Siendo d_k los coeficientes, cuyo calculo se realiza si se cumple la condición de ortonormalidad de $\Psi_k(t)$; quedando definidos como:

$$d_{j,k} = \langle f(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt$$

Por lo tanto, es posible obtener una representación de la diferencia que existe en aproximar una señal con un nivel de resolución j y aproximar la misma señal con un nivel

de resolución $j+1$, mediante el producto punto de una señal con un conjunto de funciones que expandan el espacio W_j donde j será el elegido de acuerdo al grado de aproximación que se desee, es así como la función Wavelet en W_0 corresponde al complemento del espacio V_0 en V_1 y en forma general tal que:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

4. DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN

La aplicación consiste en aproximar la función $f(t) = t$ sobre el intervalo $[-3,3]$ (mostrada en la Figura 3), mediante la función de escalamiento $\Phi(t)$ y la función Wavelet $\Psi(t)$.

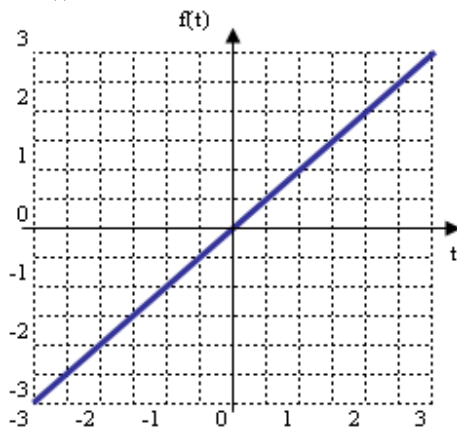


Figura 3. Grafica de $f(t) = t$

4.1 Aproximación de $f(t)=t$ utilizando la función de escalamiento $\Phi_k(t)$

4.1.1 Generando un espacio V_0 con $j = 0$

Donde:

$$\Phi_k(t) = \Phi(t - k) = \begin{cases} 1, & \text{Si } k \leq t < k+1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Con k que pertenece al intervalo $[-3,2]$.

Se tiene que:

$$f(t) = \sum_{k=-3}^2 c_k \Phi_k(t)$$

$$f(t) = c_{-3}\Phi_{-3}(t) + c_{-2}\Phi_{-2}(t) + c_{-1}\Phi_{-1}(t) + c_0\Phi_0(t) + c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t)$$

$$f(t) = c_{-3}\Phi(t+3) + c_{-2}\Phi(t+2) + c_{-1}\Phi(t+1) + c_0\Phi(t) + c_1\Phi(t-1) + c_2\Phi(t-2)$$

Calculando el primer término se tiene:

$$c_{-3} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\Phi(t+3)dt$$

Siendo:

$$\Phi_{-3}(t) = \Phi(t+3) = \begin{cases} 1, & \text{Si } -3 \leq t < -2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Como: $\Phi(t+3)$ sólo está definida en el intervalo $[-3,-2]$

$$c_{-3} = \int_{-3}^{-2} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-3}^{-2} = \left(\frac{4}{2} - \frac{9}{2}\right) = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Para el segundo término $\Phi(t+2)$, sólo está definida en el intervalo $[-2,-1]$, de tal modo que:

$$c_{-2} = \int_{-2}^{-1} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) = -\frac{3}{2} = -1,5$$

De forma análoga, se calculan los restantes coeficientes, a fin de completar la Tabla 1.

Coficiente	Valor obtenido
C_{-3}	-2,5
C_{-2}	-1,5
C_{-1}	-0,5
C_0	0,5
C_1	1,5
C_2	2,5

Tabla 1. Coeficientes función de escalamiento para V_0

En la Figura 4 se muestra la aproximación obtenida en el espacio V_0 .

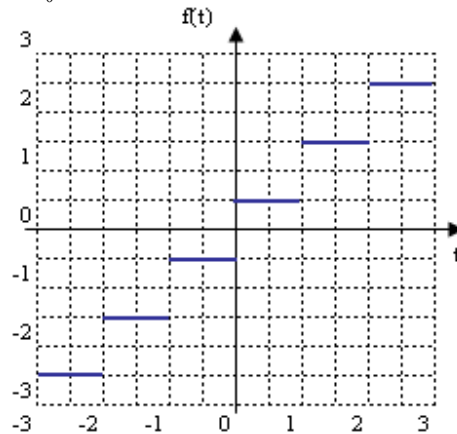


Figura 4. Aproximación de $f(t) = t$ en el espacio V_0

4.1.2 Generando un espacio V_1 con $j = 1$

Donde:

$$\Phi_{j,k}(t) = \Phi(2^j t - k) = \begin{cases} 1, & \text{Si } 0 \leq 2^j t - k < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Para este nuevo conjunto de funciones de escalamiento, $\Phi_{j,k}(t)$ en el espacio V_1 , t se define en el intervalo:

$$k2^{-j} \leq t < (k+1)2^{-j}$$

Para el segundo término $\Psi(t+2)$, sólo está definida en el intervalo $[-2,-1]$, de tal modo que:

$$d_{-2} = 2 \int_{-2,0}^{-1,0} t dt = 2 \int_{-2,0}^{-1,5} t dt + 2 \int_{-1,5}^{-1,0} (-t) dt = t^2 \Big|_{-2,0}^{-1,5} - t^2 \Big|_{-1,5}^{-1,0} = -0,5$$

De forma análoga, se calculan los restantes coeficientes, a fin de completar la Tabla 4.

Coefficiente	Valor obtenido
d_{-3}	-0,5
d_{-2}	-0,5
d_{-1}	-0,5
d_0	-0,5
d_1	-0,5
d_2	-0,5

Tabla 3. Coeficientes función de escalamiento para W_0
En la Figura 6 se muestra la aproximación obtenida en el espacio W_0 .

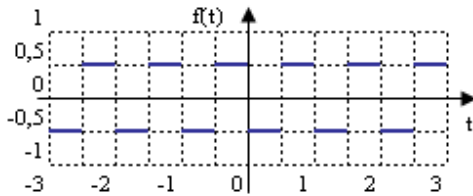


Figura 6. Aproximación de $f(t) = t$ en el espacio W_0

4.1.1 Generando un espacio W_1 con $j = 1$

Donde:

$$\Psi_{j,k}(t) = \Psi(2^j t - k) = \begin{cases} 1, & \text{Si } 2^j k \leq t < 2^j k + 2^{-(j+1)} \\ -1, & \text{Si } 2^j k + 2^{-(j+1)} < t \leq (k+1) 2^j \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ahora como la función $f(t) = t$ se ha definido en el intervalo $[-3,3]$, se tiene entonces que k pertenecería al intervalo $[-6,5]$ y la representación será:

$$f(t) = \sum_{k=-6}^5 d_k \Psi_{j,k}(t) = \sum_{k=-6}^5 d_k \Psi(2t - k)$$

$$f(t) = d_{-6} \Psi(2t + 6) + d_{-5} \Psi(2t + 5) + d_{-4} \Psi(2t + 4) + d_{-3} \Psi(2t + 3) + d_{-2} \Psi(2t + 2) + d_{-1} \Psi(2t + 1) + d_0 \Psi(2t) + d_1 \Psi(2t - 1) + d_2 \Psi(2t - 2) + d_3 \Psi(2t - 3) + d_4 \Psi(2t - 4) + d_5 \Psi(2t - 5)$$

Para que se cumpla la ortonormalidad de la familia de funciones W_1 , debe tenerse en cuenta un factor de normalización $2^{-(1+1)}$ y que se adapta a este caso particular para el cálculo de los coeficientes así:

$$2^{-2} d_{j,k} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt$$

Calculando el primer término con $j=1$ y aplicando el factor de normalización se tiene:

$$2^{-2} d_{-6} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi(t + 6) dt$$

Siendo:

$$\Psi_{-6}(t) = \Psi(2t + 6) = \begin{cases} 1, & \text{Si } -3,00 \leq t < -2,75 \\ -1, & \text{Si } -2,75 \leq t < -2,50 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Como: $\Psi(2t+6)$ sólo está definida en $[-3;-2,5]$

$$d_{-6} = 4 \int_{-3}^{-2,5} t dt = 4 \int_{-3}^{-2,75} t dt + 4 \int_{-2,75}^{-2,5} (-t) dt = 2t^2 \Big|_{-3}^{-2,75} - 2t^2 \Big|_{-2,75}^{-2,5} = -0,25$$

De forma análoga, se calculan los restantes coeficientes, a fin de completar la Tabla 2

Coefficiente	Valor obtenido
C_{-6}	-0,25
C_{-5}	-0,25
C_{-4}	-0,25
C_{-3}	-0,25
C_{-2}	-0,25
C_{-1}	-0,25
C_0	-0,25
C_1	-0,25
C_2	-0,25
C_3	-0,25
C_4	-0,25
C_5	-0,25

Tabla 4. Coeficientes función de escalamiento para W_1

En la Figura 7 se muestra la aproximación obtenida en el espacio W_1 .

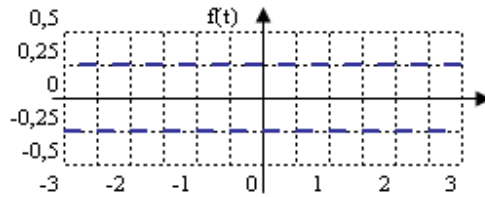


Figura 7. Aproximación de $f(t) = t$ en el espacio W_1

5. CONCLUSIONES

Al aplicar la Wavelet Haar es fácilmente observable la forma en que el sistema trabaja, ya que poco a poco recorre la función y cada vez que se aumenta el análisis en los espacios V_j y W_j , también mejora la resolución y por ende el seguimiento a la función.

Aunque en el artículo no se demostró la ortogonalidad y normalidad de las funciones de Escala y Wavelet, si se hace énfasis en que todo el desarrollo y cálculo de los coeficiente c_k y d_k , se fundamenta en estas características propias de los sistemas Wavelet.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] CANO GARZÓN, Hugo Baldomiro; CORTÉS OSORIO, Jimmy Alexander; CHAVES OSORIO, José Andrés. *Del análisis de fourier a las wavelets transformada continua wavelet (cwt)* Revista Scientia et Technica Año XIII, No 37, Diciembre 2007, pp. 133 -138

[2] <http://es.wikipedia.org/wiki/Wavelet>

[3] http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_00_8276-06.html

[4] FAUNDEZ PABLO; FUENTES ALVARO. *Procesamiento digital de señales acústicas utilizando Wavelets*, pp. 59-84.