

## MODELO MATEMÁTICO PARA UN ROBOT MÓVIL

### Mathematical Model for a Mobile Robot

#### RESUMEN

En este artículo se desarrolla el modelo matemático de un robot móvil tipo diferencial. Para el desarrollo del modelo se consideran las características cinemáticas, dinámicas y eléctricas del motor. El modelo se desarrolla con base en los datos de la plataforma móvil PMETIN. Se realizan algunas simulaciones empleando Simulink para comprobar el correcto funcionamiento del modelo.

**PALABRAS CLAVES:** Modelo matemático, Robot Móvil, PMETIN, Simulación.

#### ABSTRACT

*In this paper a mathematical model of a differential type mobile robot is developed. For the development of the model is considered the cinematic, dynamic and electrical characteristics. The model it develops on the basis of the information about the mobile platform PMETIN. Some simulations are realized using Simulink to verify the correct functioning of the model.*

**KEYWORDS:** *Mathematical Model, Mobile Robot, PMETIN, Simulation.*

**LUÍS HERNANDO RÍOS G.**

Ingeniero Electrónico MS.c

Profesor Titular

Universidad Tecnológica de Pereira

lhgonza@utp.edu.co

**MAXIMILIANO BUENO L.**

Ingeniero Electricista MS.c

Profesor Catedrático

Universidad Tecnológica de Pereira

max@ohm.utp.edu.co

**Grupo GIROPS**

## 1. INTRODUCCIÓN

Con el fin de poder realizar estudios teóricos sobre un robot móvil, se requiere disponer de un modelo matemático completo. Esto permite observar, a través de simulaciones, los efectos de diferentes eventos sobre el robot, y así planear estrategias de control para afrontar una tarea cualquiera.

Los Robots móviles se pueden construir basándose en diferentes diseños de plataformas, que se diferencian por los diversos sistemas de tracción que utilizan. Las plataformas más comunes utilizan el sistema de tracción diferencial (differential steering), estas utilizan motores independientes para cada una de las ruedas pero situados sobre el mismo eje, además utiliza ruedas locas o puntos de sostenimiento para proporcionar estabilidad a la plataforma.

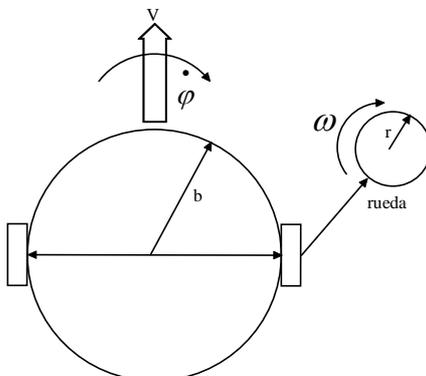


Figura 1. Robot móvil de dos ruedas.

La figura 1 presenta un esquema simplificado de un robot móvil de dos ruedas independientes o de tracción diferencial.

## 2. PARÁMETROS INVOLUCRADOS EN EL MODELO

La figura 1 muestra tanto los parámetros físicos del robot, como las variables dinámicas. Los parámetros físicos del robot son: la longitud del eje (o distancia entre las ruedas) denominada  $2b$ ; el radio de cada rueda  $r_1$  y  $r_2$ ; la masa del cuerpo del robot,  $M$ ; y la masa de cada una de las ruedas,  $m$ . Las variables relacionadas con el movimiento del robot son: la velocidad lineal que posee el cuerpo del robot,  $V$ ; la velocidad angular que posee el cuerpo,  $\dot{\varphi}$ ; y las velocidades angulares de las ruedas,  $\omega_1 = \dot{\theta}_1$  para la rueda derecha y  $\omega_2 = \dot{\theta}_2$  para la rueda izquierda.[1]

Además, entre las variables dinámicas se encuentra también la posición absoluta del robot en el espacio. Esta posición queda definida por las coordenadas bi-dimensionales del centro de masa  $(x,y)$  y el ángulo entre la dirección de movimiento del robot y el eje  $X$ , denominado  $\varphi$ , tal como se observa en la figura 2.

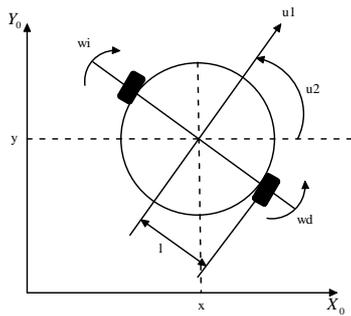


Figura 2. Localización en el plano Cartesiano del Robot.

El modelo también consta de parámetros eléctricos, asociados a los motores DC que se utilizan para entregar la tracción a las ruedas del robot. Para generar el modelo completo, el problema se divide en tres partes: las ecuaciones cinemáticas, las ecuaciones dinámicas y finalmente las ecuaciones eléctricas del sistema.

### 3. ECUACIONES CINEMÁTICAS

Las ecuaciones cinemáticas son aquellas que relacionan la velocidad de giro de cada una de las ruedas con las variables de posición del robot:  $(x, y, \varphi)$ .

Considerando al robot como un cuerpo rígido, la velocidad lineal del centro de masa se obtiene a partir del promedio de las velocidades lineales de cada una de sus ruedas. La velocidad lineal de cada rueda se obtiene como el producto de la velocidad angular (velocidad de giro) y el radio de ellas. La velocidad del centro de masa queda definida por:

$$V = \frac{r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} \tag{1}$$

El ángulo de giro del robot se determina a partir de las relaciones geométricas entre el movimiento de cada uno de las ruedas del robot, tal como se muestra en la figura 3. [2]

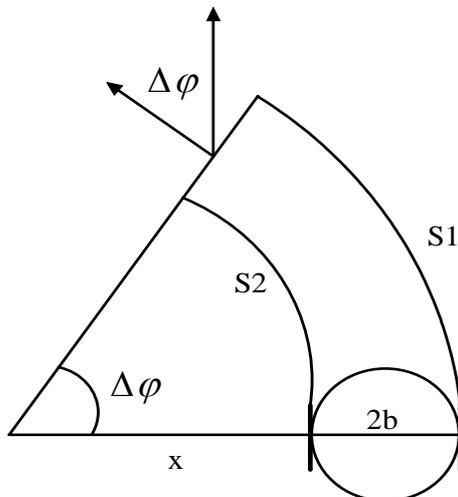


Figura 3. Relaciones Geométricas para el ángulo de giro.

Según se observa en la figura 3, el ángulo de giro del robot es igual al ángulo del arco sostenido por la trayectoria. Dado que por definición el ángulo de dirección del robot,  $\varphi$ , aumenta en sentido opuesto a las manecillas del reloj, y considerando que la rueda derecha gira a una mayor velocidad que la izquierda, el ángulo de dirección debe aumentar  $\Delta\varphi$ . Según se aprecia en la figura 3, la rueda izquierda sostiene un arco de radio  $x$ , por lo que la distancia recorrida por esa rueda está dada por:

$$S_2 = r\Delta\theta_2 = x\Delta\varphi \tag{2}$$

La rueda derecha se encuentra más lejos del centro de la circunferencia que determina la trayectoria, y recorre una distancia mayor en el mismo tiempo, dada por:

$$S_1 = r\Delta\theta_1 = (x + 2b)\Delta\varphi \tag{3}$$

Calculando el valor de la diferencia  $S_1 - S_2$  y dividiendo por el tiempo transcurrido  $\Delta t$ , se obtiene la relación entre la velocidad de giro del robot, y la velocidad de cada una de sus ruedas, como se indica en la ecuación (4).

$$\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{r(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)}{2b} \tag{4}$$

Para obtener las coordenadas de la posición del centro de masa del robot, se requiere primero descomponer la velocidad lineal del robot en las velocidades asociadas a cada eje del plano XY. Esto se presenta en la ecuación (5).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos(\varphi) \\ \dot{y} &= V \text{sen}(\varphi) \end{aligned} \tag{5}$$

### 3. ECUACIONES DINÁMICAS

Como el robot móvil de sistema tracción diferencial se compone de 2 motores D.C, el proceso de construcción del modelo del sistema se inicia con la implementación del modelo de los motores D.C de cada rueda. [3]

Se obtiene una función de transferencia del modelo del motor que es equivalente al sistema real físico. Las ecuaciones características de los motores D.C de imanes permanentes se rigen por unos coeficientes  $k_v$  y  $k_t$ , los cuales actúan como elementos transformadores. Este fenómeno físico se puede describir matemáticamente mediante las expresiones (6) y (7):

$$e = k_v * w_m \tag{6}$$

$$T_1 = k_t * I \tag{7}$$

La ecuación (6) representa la transformación de la energía eléctrica, en Voltios a velocidad angular (Unidad de Energía mecánica). La ecuación (7) define los requerimientos de corriente eléctrica causados por el par desarrollado.

Además se debe tener en cuenta la obtención de la relación de transformación mecánica a través de los reductores de velocidad de los motores. [4]

La relación de engranajes se expresa como:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{W_2}{W_m} = \frac{T_1}{T_2} \quad (8)$$

La relación  $N_1, N_2$ , representa el número de dientes del primario y del secundario. Los acoples entre los elementos mecánicos también producen pérdidas, si los acoples se encuentran en condiciones de funcionamiento, el rozamiento será del tipo viscoso definido por la letra  $b$ , el cual se expresa por (9):

$$T_r = b_{eq} * W_m \quad (9)$$

La expresión que define el circuito eléctrico que alimenta al motor es:

$$V - e = I * R + L \frac{dI}{dt} \quad (10)$$

Donde  $L$  es la inductancia del bobinado del motor y  $R$  la resistencia de éste.

El análisis del circuito mecánico se puede escribir de la siguiente forma:

$$T_1 = J_{eq} * \frac{dW_m}{dt} + T_r + F_r \quad (11)$$

Si se introduce un término de rendimiento del reductor la ecuación (12) se puede expresar:

$$T_1 * r_2 = J_{eq} * \frac{dW_m}{dt} + T_r + F_r \quad (12)$$

Donde  $J$  es la inercia del conjunto y  $r_2$  es el rendimiento del reductor.

A partir de las ecuaciones (8), (9), (10), (11) y (12) se obtienen las ecuaciones de estado.

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{k_t * r_2}{J_{eq}} I - \frac{b_{eq}}{J_{eq}} W_m - \frac{1}{J_{eq}} F_r \quad (13)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} V - \frac{R}{L} I - \frac{k_v}{L} W_m \quad (14)$$

Las ecuaciones (13) y (14) se pueden reescribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{dW_m}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{k_t * r_2}{J_{eq}} \\ -\frac{k_v}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} W_m \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{J_{eq}} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V \\ F_r \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$W_m = (1 \ 0) * \begin{pmatrix} W_m \\ I \end{pmatrix} + (0 \ 0) * \begin{pmatrix} V \\ F_r \end{pmatrix} \quad (16)$$

#### 4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL MOTOR D.C.

A partir del modelo obtenido se obtiene la función de transferencia del motor (Es importante resaltar que la plataforma cuenta con 2 motores, uno para cada rueda).

La función de transferencia del sistema que se esta estudiando es de segundo orden y se expresa como:

$$H(s) = \frac{k_T * r_2}{(L_a s + R_a)(J_{eq} s + b_{eq}) + k_T * k_v * r_2} \quad (17)$$

Al sustituir los valores de las constantes en la ecuación (15), se obtiene la función de transferencia de uno de los motores de la plataforma móvil, dicha función es de segundo orden y se obtiene la ecuación (18):

$$H(s) = \frac{0.004109}{6.967 * 10^{-12} s^2 + 3.306 * 10^{-7} s + 2.034 * 10^{-5}} \quad (18)$$

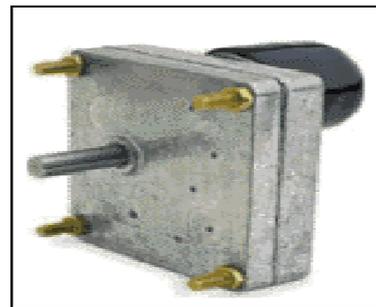


Figura 4. Motores empleados para el modelo.

Para este proyecto se usaron dos motores de 12 voltios DC marca DAYTON, modelo 2L010, los cuales desarrollan una velocidad máxima de 18 metros por minuto, su característica de torque es de 20kg. con máxima carga (Incluyendo la caja de reducción).

**4.1 Reducción del Sistema a un Sistema de Primer Orden.**

Para hacer la reducción del sistema a un sistema de primer orden, se puede eliminar el polo de más alta frecuencia, basado en los valores característicos de la función de transferencia, es decir el polo de alta frecuencia se sitúa en 47,4 rad/s, mientras que el polo dominante se sitúa en 61,5 rad/s, situación que hace concluir que el sistema es netamente de primer orden. Esto se observa en la figura 5.

La ganancia en continua del motor es del orden de 201,9775, con lo cual tenemos todos los parámetros necesarios para calcular la nueva función de transferencia. [5]

$$H(s) = \frac{k * W_n}{s + W_n} \tag{19}$$

De la expresión (20) se obtiene:

$$H(s) = \frac{201,9775 * 61,5}{s + 61,5} = \frac{12420}{s + 61,5} \tag{20}$$

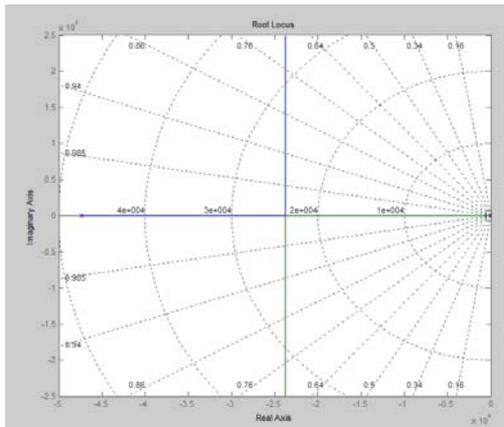


Figura 5. Polos del sistema de segundo Orden

Al comparar los resultados del sistema original de segundo orden con el sistema propuesto de primer orden, para una señal escalón se observa la gran similitud de comportamiento de los 2 sistemas, para bajas frecuencias. En la figura 6 se muestra el sistema modelado en simulink.

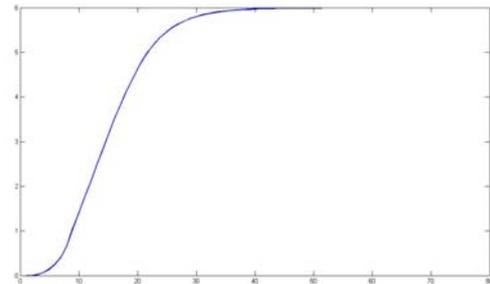
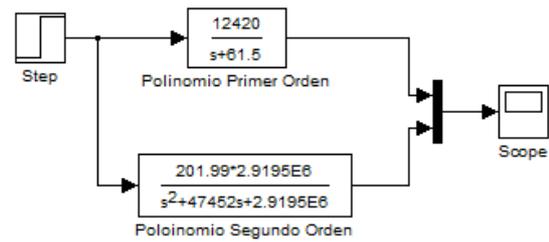


Figura 6. Función de transferencia para el motor DC y respuesta ante un escalón

**5. NO LINEALIDADES OBSERVADAS**

Se observan no linealidades debido a:

No linealidades debidas a la rotación del robot: un motor presenta diferentes coeficientes en función del sentido de rotación, aunque el fabricante solo da un valor, válido para los dos sentidos de rotación. Estas no linealidades no se pueden simular, ya que teóricamente no se disponen de datos suficientes.

No linealidades motivadas por las transiciones de rozamiento estático y cinético: la simulación del comportamiento del rozamiento en un sistema dinámico es complicada. Existen dos tipos mas generales de rozamiento, que son el rozamiento estático y el cinético. [4]

**6. FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL ENCODER**

El Encoder tiene dos canales, que entregan una señal cuadrada cada uno, que será procesada por el sistema de control. Estos impulsos pueden ser contados para determinar la posición exacta o para conocer la velocidad a la que se mueva. Los canales A y B entregan dos señales desfasadas, que se comparan entre ellas para conocer el sentido de giro.

La frecuencia máxima de operación es de 20 kHz. Superada esta frecuencia en la salida del Encoder significa que el tiempo de subida de los canales A y B es superior y que no será posible contar los pulsos. Si además se considera que cada vuelta del rotor cuenta 16

pulsos por canal, podemos determinar la velocidad máxima de giro del motor de la siguiente manera.[3]

$$20 \times 10^3 \frac{\text{cuentas}}{\text{seg}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{16 \text{ cuentas}} = 7854 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad (21)$$

La figura 7 muestra la ubicación del encoder en la plataforma.

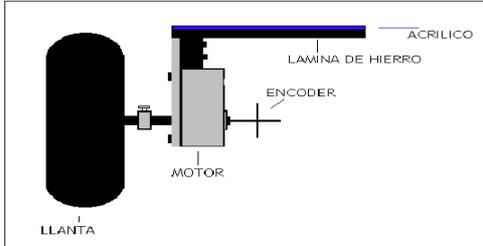


Figura 7. Función de transferencia para el motor DC y respuesta ante un escalón

### 7. MODELO CINEMÁTICO DEL ROBOT MOVIL

Para construir este modelo se consideran las siguientes hipótesis: El robot se mueve sobre una superficie plana, los ejes de guiado son perpendiculares al suelo, el deslizamiento es despreciable, el robot no tiene partes flexibles.

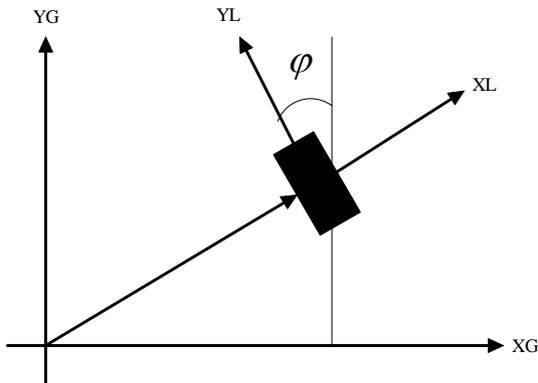


Figura 8. Ejes Coordinados para el robot móvil.

Existen dos Sistemas de Referencia G y L (Que coincide con el centro del vehículo), esto se aprecia en la figura 8. Realizando proyecciones sobre los ejes mencionados se obtiene la ecuación (22) que describe el comportamiento cinemático del robot.[5]

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_f \\ \dot{Y}_f \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \text{Sen}\varphi & -\frac{r}{2} \text{Sen}\varphi \\ \frac{r}{2} \text{Cos}\varphi & \frac{r}{2} \text{Cos}\varphi \\ \frac{r}{b} & -\frac{r}{b} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_l \\ \theta_r \end{bmatrix} \quad (22)$$

### 8. SIMULACIONES

Para realizar las simulaciones se han tomado cada una de las funciones de transferencia obtenidas y se han interconectado entre ellas para así tener el modelo completo del motor. En la figura 9 se muestra un diagrama de bloques que presenta la conexión realizada.

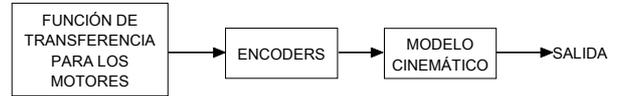


Figura 9. Diagrama de Bloques para la conexión realizada

En la figura 10 se muestran los valores obtenidos para las salidas del sistema  $(x, y, \varphi)$  al excitar el motor derecho con 5 Voltios y el motor izquierdo con 0 Voltios, la salida es una trayectoria circular.

En la figura 11 se muestran los valores obtenidos para las salidas del sistema  $(x, y, \varphi)$  al excitar el motor derecho con 0 Voltios y el motor izquierdo con 7 Voltios, la salida es una trayectoria circular.[2]

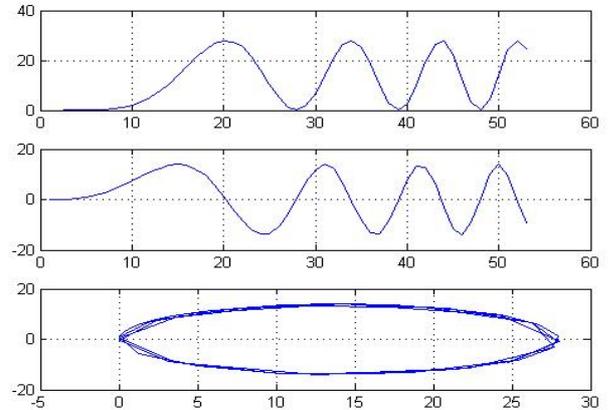


Figura 10. Trayectoria obtenido con excitaciones motor derecho 5V y motor izquierdo 0V.

Maestría. Pontificia Universidad Católica de Chile.  
Santiago de Chile. 2004

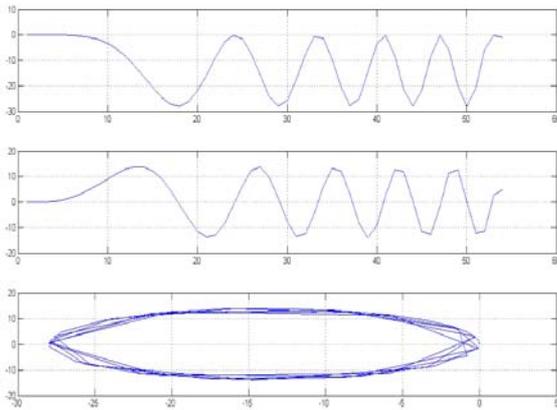


Figura 11. Trayectoria obtenido con excitaciones motor derecho 0V y motor izquierdo 7V.

## 8. CONCLUSIONES

Con la realización de este trabajo se ha obtenido el modelo matemático para un robot móvil, el cual es de utilidad para aplicar estrategias de control.

Las simulaciones realizadas han permitido comprobar la efectividad y correcto funcionamiento del modelo.

El modelamiento de robots móviles no es tarea fácil debido a la gran cantidad de factores que se ven involucrados, cada uno de estos relacionados entre si. A pesar de esto se ha podido obtener el modelo matemático tomando en cuenta todos los elementos involucrados, tales como motores, encoders y ubicación espacial de la plataforma.

## 9. BIBLIOGRAFIA

[1] Baño Azcón Alberto. Análisis y diseño de Control de Posición de un Robot móvil con Tracción Diferencial. Universitat Rovira I Virgili. Tesis de Maestría. 2003. España.

[2] Lauria Michel. Nadeau Isabelle. Lepage Pierre. Morin Yan. Design and Control of a Four Steered Wheeled Mobile Robot. Université de Sherbrooke. 2005. Canada

[3] G. Campion, G. Bastin, B. d'Andréa Novel, Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 12(1), pp. 47-62, 1996.

[4] Bermúdez Bohórquez Giovanni Rodrigo. Modelamiento Cinemático y Odométrico de Robots Móviles. Revista Ternura. Numero 12. 2003

[5] Carrasco Schmidt Rodrigo. Detección y Diagnostico de Fallas en Robots Móviles Cooperativos. Tesis de