

## CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA PARA EL MODELADO DE UNA LÁMINA DE ACERO FLEXIBLE SUSPENDIDA MAGNÉTICAMENTE

### Construction of a system for modelling a flexible steel lamina with magnetic levitation

#### RESUMEN

En este artículo se presenta el análisis del modelamiento de una lámina flexible la cual se suspende en el espacio por la acción de fuerzas magnéticas que actúan sobre ella. Dadas las características de la planta se emplean técnicas especiales para el modelado de sistemas altamente no lineales y los resultados obtenidos son utilizados con el fin de describir la dinámica del sistema. Los datos analíticos son comparados con lo obtenidos a partir del modelo real.

**PALABRAS CLAVES:** Coenergía, energía, levitación magnética, modelamiento, sistemas no lineales.

#### ABSTRACT

*This paper shows the analysis of modelling of a flexible lamina which is suspended in the space by the operation of magnetic forces that acts on it. Like the plant is nonlinear we must to use special techniques for modelling. The results are used with the purpose of describing the system. The analytical values are compared with the real model values.*

**KEYWORDS:** Coenergy, energy, magnetic levitation, modelling, non linear systems.

#### FABIO A. OCAMPO MUÑOZ

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Asociado  
Universidad Tecnológica de Pereira  
faom@utp.edu.co

#### ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
andreses1@utp.edu.co

#### JORGE HUMBERTO SAENZ

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Asociado  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jsanz@utp.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente muchos desarrollos de sistemas de levitación magnética están enfocados al modelamiento y el control de dispositivos que permiten el transporte de personas [1], los constantes avances en esta área están enfocados al desarrollo de mejores sistemas de control que permitan controlar una planta como la aquí modelada [2].

En el presente trabajo se pretende mostrar el procedimiento con el cual se puede hallar el modelo matemático de una lamina flexible ferromagnética suspendida magnéticamente. Para la validación de los resultados teóricos y los datos experimentales se construyó un prototipo como el mostrado en la figura 1 y el cual consiste básicamente de dos bobinas destinadas a producir la fuerza electromagnética (actuador) y de una lámina de acero (planta a estudiar). Estos dos últimos están montados sobre una estructura no magnética.

Técnicas especiales de análisis para la determinación del modelo de un sistema no lineal [3] son implementadas y aplicadas sobre el modelo descrito.

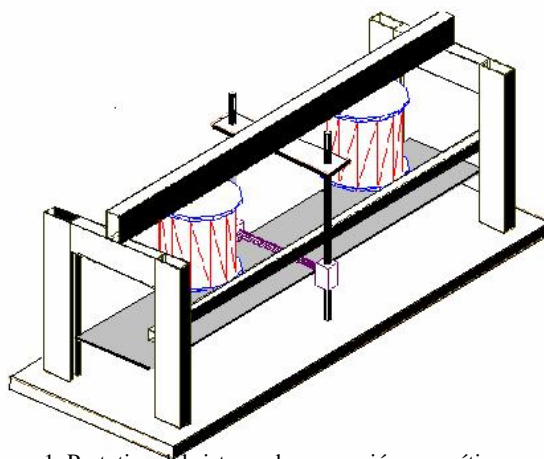


Figura 1. Prototipo del sistema de suspensión magnética

## 2. ASPECTOS CONSTRUCTIVOS DE LA PLANTA

Las dos bobinas construidas fueron diseñadas de tal manera que la fuerza magnética que producen fuera lo suficientemente fuerte como para levantar la lámina de acero y algunos accesorios adicionales para limitar los grados de libertad.

La estructura (construida de materiales no magnéticos) guía la lámina de tal manera que ésta solamente pueda

moverse en sentido vertical pero sin impedir su vibración.

Para la medida de la fuerza magnética que generan las dos bobinas, se utilizó una balanza electrónica de alta precisión.

**3. MODELAMIENTO DEL SISTEMA**

Con el fin de obtener el modelo matemático del sistema que se muestra en la figura 2, se deduce de las funciones de estado de energía y coenergía la fuerza que produce el campo magnético en el entrehierro debido a la corriente que entra a las bobinas [4] (ecuación 1).

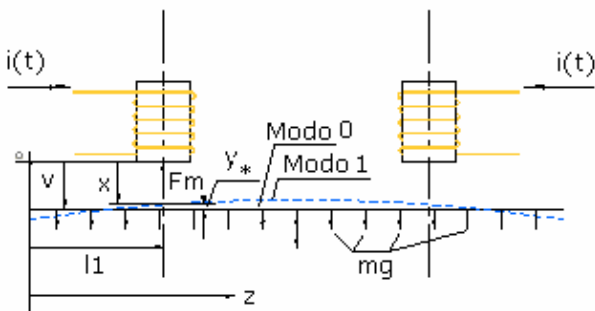


Figura 2. Descripción del sistema a modelar

$$F_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d[L_i(x) \cdot i^2(t)]}{dx} \tag{1}$$

Para las inductancias de las bobinas se emplea la siguiente expresión [4].

$$L_i(x) = L_1 + \frac{L_0}{1 + x/a} \tag{2}$$

En donde,  $L_i(x)$  es el valor de la inductancia de cada bobina y que depende de  $x$ .  $L_1$  es el valor de la inductancia sin la lámina.  $L_1 + L_0$  es el valor de la inductancia con la lámina adherida al núcleo.

Reemplazando la ecuación 2 en la ecuación 1 se tiene que:

$$F_m = -\frac{1}{2} \frac{d[L_i(x)i^2(t)]}{dx} = \frac{L_0}{2a} \left( \frac{i}{1 + x/a} \right)^2 \tag{3}$$

Los valores de  $L_0$  y  $a$ , son calculados a partir de los resultados obtenidos en las medidas experimentales hechas en el prototipo.

Las comparaciones realizadas entre las medidas de fuerzas en el prototipo y las obtenidas mediante la expresión analítica se muestran en la figura 3.

Para ello se hacen medidas de la fuerza de atracción a diferentes distancias de la lámina con respecto a las bobinas. En la figura 3 se puede observar dichas distancias. Para cada distancia se toman datos de fuerza y de corriente y luego se grafican. El conjunto de curvas encontradas son comparadas con las obtenidas analíticamente mediante la ecuación 3 para cada valor de distancia y de corriente.

Se observa la similitud en los resultados con lo cual se valida el modelo propuesto en la ecuación 3.

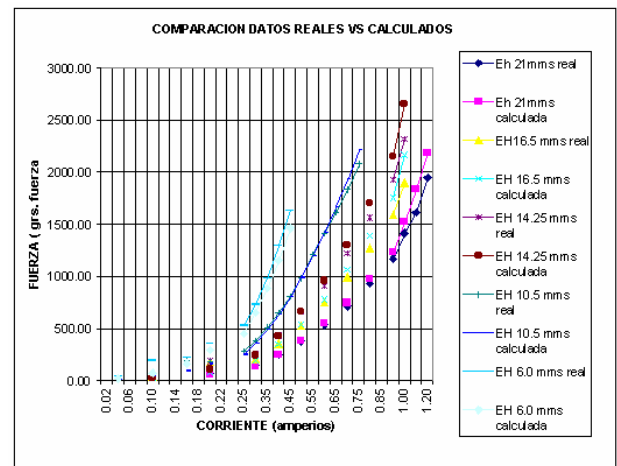


Figura 3. Curvas comparativas de la fuerza magnética

Dado que la planta de estudio se trata de una lámina flexible, se requiere hacer un análisis de los modos de vibración. Asumiendo que la lámina es una viga (ver figura 4), se puede obtener la siguiente ecuación de onda [5].

$$y^* = \psi(z) \cdot \text{sen}(\omega_n t + \theta) = \psi(z) \cdot y(t) \tag{4}$$

En donde  $\psi(z)$  es la amplitud de la vibración y depende del punto considerado en  $z$ .

Ahora bien tomando como condiciones de frontera las de una viga con extremos libres se obtiene la siguiente solución para  $\psi(z)$ .

$$\psi(z) = \cos kz + \cosh kz - \frac{\cos kL - \cosh kL}{\text{sen}kL - \text{sen}hkL} \cdot (\text{sen}kz + \text{sen}hkz) \tag{5}$$

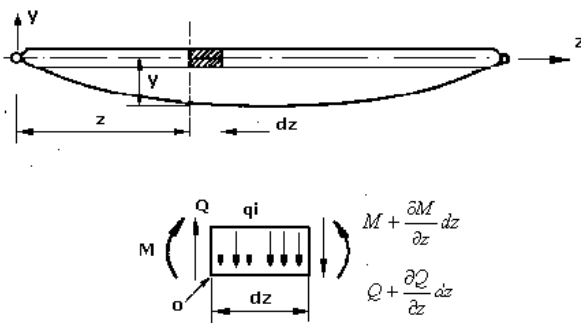


Figura 4. Esfuerzos presentados en una viga.

Siendo  $y^*$  el desplazamiento vertical de la lámina debido a los modos de vibración.  $\psi(z)$  es llamada la ecuación modal y  $L$  es la longitud de la lámina.

Para encontrar las ecuaciones diferenciales correspondientes al modelo, se consideran únicamente dos modos [5]. El modo cero que considera la lámina como un cuerpo rígido y cuyo movimiento se describe por:

$$\ddot{v} = -\frac{F_m}{m} + g \tag{6}$$

Y el modo uno o de vibración fundamental descrito por:

$$M_1 \ddot{y} + G_1 \dot{y} + K_1 y = P_1(t) \tag{7}$$

En donde  $M_1$  es la masa generalizada y está dada por:

$$M_1 = \int_0^L \psi^2(z) m_L dz$$

$$\frac{G_1}{M_1} = 2\xi \omega_n \tag{8}$$

$$\frac{K_1}{M_1} = \omega_n^2$$

$$P_1(t) = \int_0^L F_m \delta(z-l_1) - \frac{m_s}{2} g \cdot \delta(z-L/2) - m_L g H(z) \psi(z) dz \tag{9}$$

$P_1(t)$  comprende todas las fuerzas referidas al modo uno siendo  $m_L$  la masa de la lámina por unidad de longitud,  $m_s$  la masa del soporte central,  $\delta$  la función impulso,  $H$  la función escalón.

Reemplazando y reorganizado términos, la ecuación 7 puede escribirse como:

$$\ddot{y} = -2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{y} - \omega_n^2 \cdot y + \alpha_2 \cdot F_m + c \tag{10}$$

Obsérvese que en la ecuación 7 se ha adicionado el término  $G_1 \cdot \dot{y}$  correspondiente a la amortiguación.

En el punto de aplicación de  $F_m$  se tiene que  $x = v - k \cdot y$ .

Al derivar ambos términos se tiene que  $\dot{x} = \dot{v} - k \dot{y}$ , siendo  $k = -\psi(l_1)$ .

Los valores hallados para los diferentes parámetros son: (consultar [6] para ver como obtener estos parámetros)

- $L_0 = 0.59h$
- $\alpha_2 = -13.0048$
- $a = 0.0067$
- $g = 9.816 \frac{m}{s^2}$
- $c = 3.1024$
- $k = 0.1984$
- $\omega_n = 38.67 \frac{rad}{s}$
- $\xi \in [5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-2}]$

Los valores de  $L_0$  y  $a$  son hallados de forma experimental.

Como puede notarse se maneja una gran incertidumbre en el término  $\xi$  o coeficiente de amortiguamiento, lo cual debe tenerse en cuenta al diseñarse el respectivo controlador.

Para el cálculo de la frecuencia del modo uno, se emplea la siguiente relación [7]:

$$\begin{aligned} \cos \lambda_1 &= \cosh \lambda_1 = 1 \\ k_1 &= \frac{\lambda_1}{L} \\ \omega_1 &= k_1^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{m \cdot l}} \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora bien, reemplazando los valores de las constantes y variables presentadas en [6], se tiene que el conjunto de ecuaciones representativas del modelo es:

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= -51.093 \cdot \left( \frac{i}{1+149.25 \cdot x} \right)^2 + 9.816 \\ \ddot{y} + 0.3867 \cdot \dot{y} + 1495 \cdot y &= -13.0048 \cdot \left( \frac{i}{1+149.25 \cdot x} \right)^2 + 3.0124 \\ \dot{x} &= \dot{v} - 0.1984 \cdot \dot{y} \end{aligned} \tag{12}$$

En donde  $i$  es la corriente de entrada a las bobinas y actúa como la señal de control.

#### 4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA

De acuerdo con las ecuaciones descritas con anterioridad, se realiza la simulación del modelo como se muestra en la figura 5.

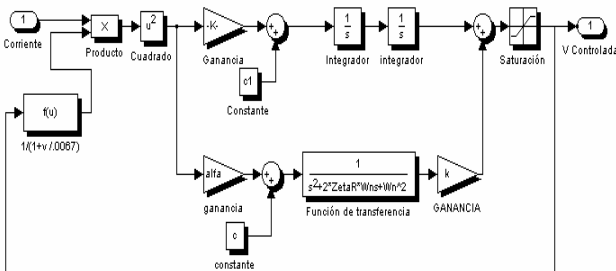


Figura 5. Estructura del modelo de la planta para la simulación.

El modelo en simulink contiene los bloques funcionales determinados por las ecuaciones encontradas para el sistema. La señal de entrada es la corriente de las bobinas y la salida es el desplazamiento de la lámina con respecto a su posición inicial.

La primera prueba realizada sobre el sistema permite observar su comportamiento al excitar el modo cero o de comportamiento como cuerpo rígido.

La respuesta a este modo se muestra en la figura 6.

La segunda prueba presenta la respuesta del sistema a la excitación del modo uno o de frecuencia fundamental. La respuesta a este modo se presenta en la figura 7.

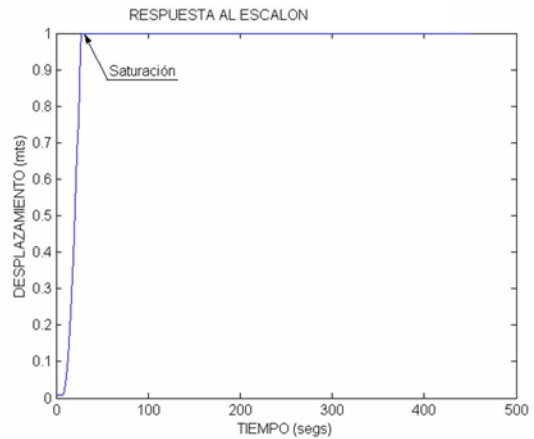


Figura 6. Respuesta al escalón del modo cero.

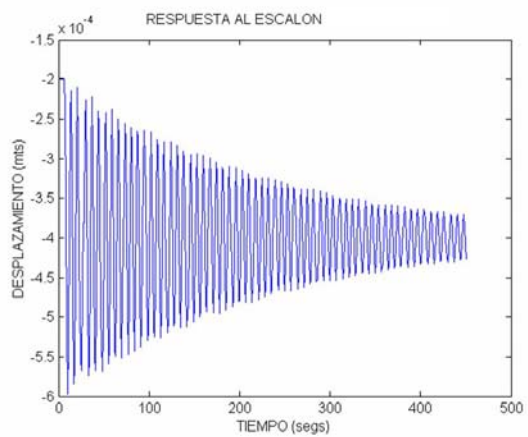


Figura 7. Respuesta al escalón del modo uno.

#### 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se presenta un modelo matemático en el cual se tiene en cuenta los modos cero y uno de vibración partiendo de la consideración de la lámina como una viga con los extremos libres.

Se observa que el sistema en el modo cero es inestable, lo cual quiere decir que la lamina se alejara del punto de equilibrio con cualquier disturbio, esto es consistente con los resultados obtenidos en la suspensión magnética de un disco rígido presentado en [6].

En cambio la respuesta de la lamina en el modo uno o de frecuencia fundamental es estable. Lo cual quiere decir que las vibraciones se atenúan con el tiempo.

El modelo presentado servirá para estudiar el comportamiento de este sistema en trabajos futuros y el desarrollo de los respectivos controladores.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Matlab and Simulink User's guide, "Control experiments for the feedback magnetic levitation systems", manual version 1.0-A, New York, USA. October 11, 2000.
- [2] Matlab and Simulink User's guide, "Control experiments for MAGLEV control systems", manual version 1.0-A, New York, USA July 29, 2006.
- [3] D. Almeida and M. Tadeu, "Vibrações mecânicas para engenheiros", Sao Pablo, Brazil, Ed. Edgard Blucher Ltda, 1987.
- [4] J. M. Aller, "Máquinas eléctricas rotativas: Introducción a la teoría general", Universidad Simón Bolívar, Venezuela, marzo 2006.
- [5] R. Martínez, "Levitación magnética controlada de un disco rígido", Ms.C. dissertation, Postrado de ingeniería eléctrica y electrónica, Universidad del Valle, Santiago de Cálí, 2000.
- [6] F. A. Ocampo, "Suspensión magnética controlada de una lámina flexible", Ms.C. dissertation, Postgrado de ingeniería eléctrica y electrónica, Universidad del Valle, Santiago de Cali, 2002.
- [7] F. Naranjo, J.C. Mena and J. Tombé, "Control de un sistema de levitación magnética", Primer congreso de la Asociación Colombiana de Automática, Cálí, Noviembre 1994, pp. 178-182.

