MODIFICACION DEL JUEGO DEL HEX Y SU APLICACIÓN EN LA PRUEBA DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

Modification of the game of the Hex and its application in the test of the Brouwer's fixed point theorem

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.

Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Estudiante de Doctorado en Matemáticas. Universidad de la Frontera. Temuco - Chile.
Profesor de Planta (Auxiliar) – Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

FERNANDO MESA

Licenciado en Matemáticas y Física
Especialista en Docencia Universitaria
Magíster en Matemáticas
Magíster en Instrumentación Física.
Profesor Asociado – Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

FRANCISCO J. CARDONA G.

Licenciado en Matemáticas y Física
Estudiante Maestría en Enseñanza de la Matemática.
Universidad Tecnológica de Pereira
fcopacho@hotmail.com

RESUMEN

El presente artículo presenta una demostración del teorema del punto fijo de Brouwer utilizando una modificación del juego del Hex o también llamado el juego de Nash. Se explica además de forma general las reglas de dicho juego.

PALABRAS CLAVES: Juego de Nash, juego del Hex, teorema del punto fijo de Brouwer

ABSTRACT

The present article presents a demonstration of the Brouwer's fixed point theorem using a modification of the game of the Hex or also called the game of Nash. One explains in addition to general form the rules of this game.

KEYWORDS: *Nash' s Game, game of the Hex, Brouwer's fixed point theorem.*

1. INTRODUCCIÓN

El matemático Holandés *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* (1881-1966), formuló el Teorema de Brouwer. Demostró la importancia de los espacios cartesianos y promovió la escuela matemática Intuicionista. El teorema establece que si se supone una función *f(x)* continua con dominio [0,1] y recorrido [0,1], entonces se garantiza que existe al menos un punto fijo, es decir, existe al menos un valor x^* en [0,1] tal que $f(x^*) = x^*$.

El juego del Hex o juego del Hexágono fue inventado en 1942 por el matemático *Piet Hein* en el instituto de física teórica Niels Bohr de Copenhague en Dinamarca

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2008
Fecha de Aceptación: 19 de Mayo de 2008

apareciendo publicado por primera vez el 26 de diciembre del mismo año en la revista danés Polytiken y fue llamado “Polígono”, que no era más que un tablero de 11x11 hexágonos y cuyas reglas eran idénticas a las del juego actual.
Hein inventa el juego cuando contemplaba el teorema de los cuatro colores y descubre que la topología del tablero del Hex permite pintar éste con tan sólo tres colores.

Posteriormente el matemático Norteamericano *Jhon Forber Nash* reinventó el juego en el piso de su baño ya que el suelo del mismo tenía azulejos hexagonales teselados que semejaban un tablero del hex; el mismo inspiró a *Nash* a crear senderos a través del piso en una dirección mientras que su adversario trataba de crear un sendero en la dirección perpendicular a la de su contrincante. Los dos jugadores deberían evitar igualmente que su compañero lograra hacer la senda.

El nombre del Hex fue acuñado por los hermanos *Parker* en el año de 1952 año en el cual fue comercializado; pero sólo fue hasta finales de la década de los 50 que el juego toma importancia en los diversos departamentos de matemáticas del mundo, gracias a la publicación hecha por *Martin Gardner* en la revista Scientific American en el año 1957.

El juego tiene teóricamente una propiedad que dice “el primer jugador posee una estrategia ganadora” a de cumplir siempre y cuando contemos con tableros $n \times n$, esto sea podido demostrar hasta para tableros de 9x9 el cual ha sido demostrado por el matemático informático *Jing Yang* en el año de 2003.

2. EL JUEGO DEL HEX

El juego del Hex es jugado entre dos personas las cuales se ubican frente a un tablero que consta de $n \times n$ hexágonos distribuidos de forma romboidal, de tal manera que posee cuatro esquinas que pasarán a ser propiedad común de los jugadores. Cada jugador posee dos lados opuestos del tablero que están marcados con un color igual, las cuatro esquinas son de propiedad común.

Inicialmente se lanza a suerte quien es el primer jugador que inicia la partida, este a su vez decide con cual color desea jugar. Este comienza el juego colocando una ficha o coloreando una de estas celdas hexagonales vacías. Los movimientos se harán por turnos alternos ocupando una celda vacía a la vez, pero nunca se podrán desplazar fichas ya puestas. Los hexágonos de las cuatro esquinas son de propiedad común.

El objetivo de cada uno de los jugadores será construir un sendero continuo de fichas desde un lado del tablero al lado opuesto, así un jugador creará un camino de un color y el contrincante de otro color. Gana el jugador que logre construir primero este sendero, el cual puede tomar cualquier forma pero debe de ser todo del mismo color.

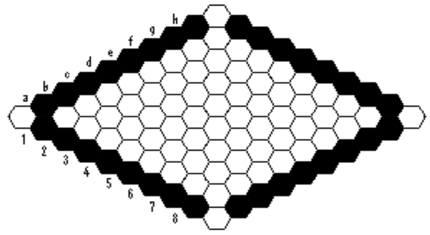

Figura 1. Tablero 8 x 8

Como se mencionó antes, este juego tiene como propiedad, que el primer jugador siempre va poder tener una estrategia ganadora, aunque solo se conozca para tableros de 9 x 9, se podrá incluir una regla para minimizar este poder teórico.

“Después de realizar la primera jugada, el segundo jugador decide si cambia esta ficha por una de las suyas”. Y luego el juego continúa sin ninguna alteración.

Es evidente que las reglas a la hora de jugar al Hex son simples pero esto no desmerita toda la complejidad que pueda contener el juego.

3. MODIFICACION DEL JUEGO.

El tablero de hexágonos del juego del hex puede ser modificado para realizar el análisis matemático del mismo, el cual sirve para la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer.

En este espacio se muestran algunas representaciones graficas de cómo es que ocurre el homeomorfismo del Tablero del Hex al Cuadrado Unitario.

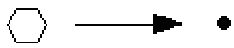

Figura 2. Orden progresivo de las graficas

La figura 2 muestra como un hexágono se puede transformar en un punto, donde la relación hexágono-punto al parecer geométricamente no guarda ninguna equivalencia, pero en el juego del Hex este homeomorfismo transmite propiedades del hexágono fundamentales para el desarrollo del mismo.

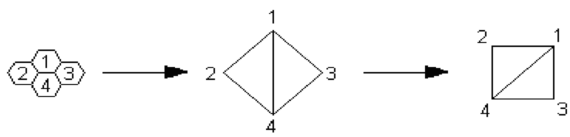

Figura 3. Transformación de un tablero 2 x 2

La Figura 3 muestra como un tablero de 2 x 2 del juego del Hex por medio del homeomorfismo usado se convierte en un cuadrado unitario de 4 vértices, luego se

rota 45° en sentido horario, con el fin de que asuma la posición usual del plano cartesiano.
A modo de ejemplo mostraremos el homeomorfismo propio para un tablero del Hex de 4 x 4.

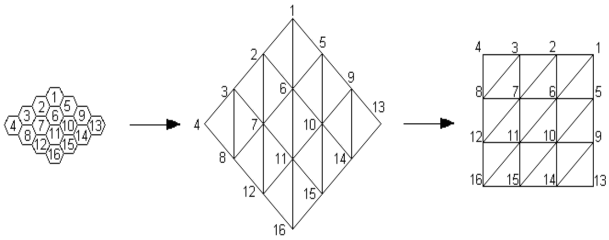

Figura 4. Transformación de un tablero 4 x 4

Finalmente, queda claro como se puede transformar un tablero del Hex a un tablero del cuadrado unitario.

Ahora solo hace falta mostrar como el cuadrado unitario esta inscrito en I^2 y como se generan todos los diversos vértices de éste.

Sea *k* el número de divisiones de un lado del cuadrado unitario. (Ver figura 5 como ejemplo)

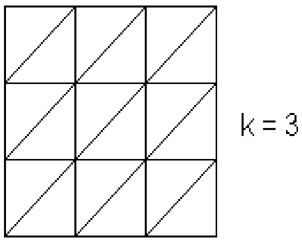

Figura 5. Divisiones del cuadrado unitario 3 x 3

Estas divisiones se realizaran siempre dentro de I^2, ahora si se quiere ver estas divisiones relacionadas con la distancia al origen se tiene lo siguiente:

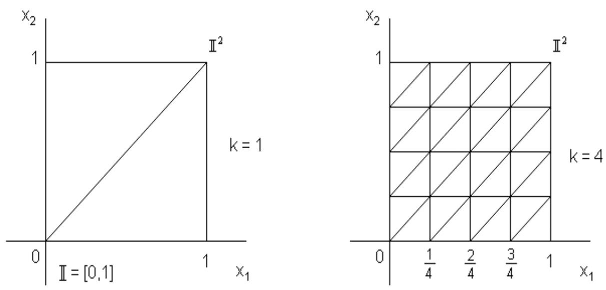

Figura 6. Divisiones del cuadrado unitario

Las figura 6 muestra la forma de obtener una ecuación que se puede aplicar para saber la distancia desde el origen a la primera partición, luego las demás podrán ser deducidas fácilmente.

Sea *n* la distancia desde el origen a la primera división y por simetrías la distancia que separa las particiones es $n = \frac{1}{k}$, de aquí se puede deducir que el valor de *k* debe de ser un número natural diferente de cero ($k \neq 0, k \in \mathrm{P}$).

El siguiente es un tablero modificado del Hex o tablero del cuadrado unitario.

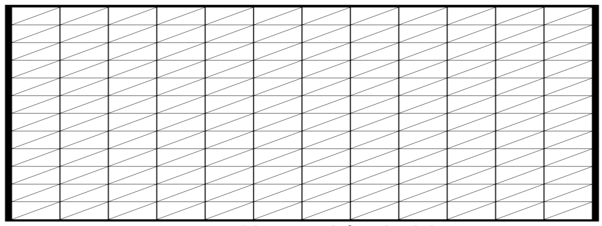
Figura 7. Tablero modificado del Hex

Este tablero es análogo a un tablero de hexágonos de 13 x 13. En este tablero el juego se modifica un poco. Las reglas del juego serán las siguientes:

1. Cada vértice del tablero representará un hexágono.

2. Se elegirá a la suerte quien será el primer jugador en hacer el primer punto el cual se dibujará sobre el vértice escogido.

3. Un jugador reclamará una línea cuando pueda pintar dos vértices consecutivos. Obviamente esa línea será pintada del color de quien haya escogido los vértices consecutivos.

4. Al igual que en el tablero de hexágonos gana quien logre hacer una línea continua de un extremo al otro del tablero uniendo los colores acordes al jugador.

4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA USANDO EL TABLERO MODIFICADO DEL HEX.

Se usará para la demostración la norma $|x| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ donde $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Sea $I = [0,1]$, entonces I^2 será el cuadrado

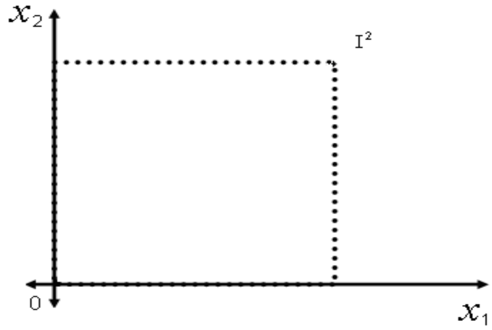

Figura 8. Cuadrado unitario

Sea además $f_i(x)$ será la coordenada i-ésima de f(x) teniendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Teorema 4.1. (Teorema del Hex). El juego del Hex nunca termina empatado, es decir siempre existe un camino que sea una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

Demostración. Supóngase que todo el cuadro del Hex se llena con hexágonos negros o blancos pero que no hay ningún ganador. Tómese ahora el cuadro del Hex y márquense los cuatro hexágonos de las esquinas como u, u´, v, v´ así:

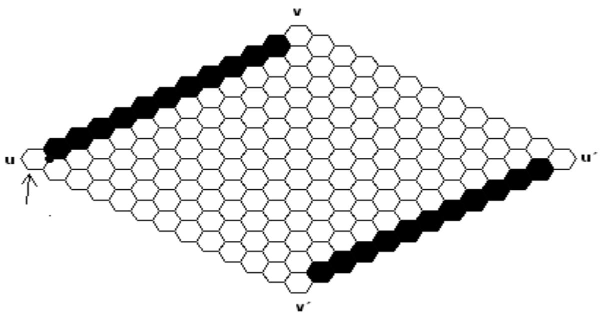

Figura 9. Tablero de Hex

Estos cuatro hexágonos son de propiedad común; los hexágonos que ya están marcados con negro y blanco sólo pertenecen a estos colores. Partiendo del vértice marcado en el hexágono **u** debemos comenzar a hacer un camino que vaya por algún lado del hexágono, con la condición que el lado por el cual vaya tenga un el color negro en un lado y el blanco en el otro. En la figura 9 se puede ver como el vértice marcado, al cual llegan tres lados cumple inicialmente con esa propiedad; basta con seguir el lado que está justo en frente de él pues ese lado tendrá el color negro en su parte superior y el blanco en su parte inferior. Podremos entonces trazar una primera línea. En el hexágono en blanco que hay a continuación puede ir el color blanco o el negro; no importa el color que se ubique allí, nuestro camino podrá continuar así (en el caso que el siguiente hexágono sea blanco):

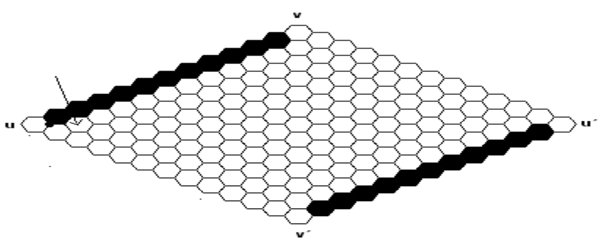

Figura 10. Tablero en juego

Se puede ver como el camino elegido continúa y ahora se debe decidir cual color poner en el hexágono siguiente: no importa que color se ubique, el camino podrá siempre continuar sucesivamente hasta llegar a cualquiera de los extremos blancos o negros respectivamente. Si a un lado de la curva que se está trazando siempre habrá de quedar un color o el otro, y éste podrá llegar a un extremo opuesto del tablero, al color que se llegue se tendrá que se habrán unido los dos extremos con una línea continua de un solo color. Por ejemplo:

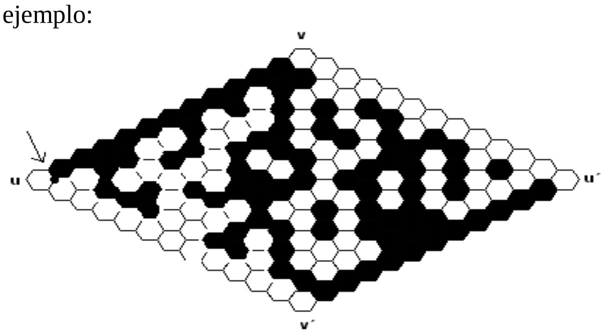

Figura 11. Jugada del Hex

Se ve en este caso, y pintada de blanco, la línea que termina en el extremo opuesto del tablero del hex.

De acuerdo a esto siempre se podrán unir los dos extremos del tablero con una línea continua de uno u otro color. Si se comienza en el vértice **u´** se podrá hacer similar razonamiento. Aquí termina la demostración un tanto intuitiva del teorema del hex.

Se utilizará a continuación el tablero modificado del hex para la siguiente demostración. Como se mencionó anteriormente el tablero modificado es completamente equivalente al tablero hecho de hexágonos.

El tablero realizado a continuación tiene cada uno de sus lados divididos en 10 partes iguales y está inscrito en I^2:

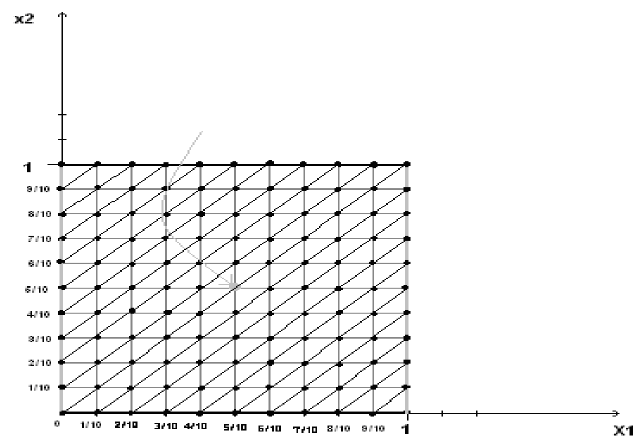

Figura 12. Tablero modificado

Con líneas blancas (grises) y negras están pintados los respectivos extremos que deben ser unidos por los dos jugadores. El punto rojo es sólo un punto del tablero modificado con coordenadas $\left(\frac{5}{10},\frac{5}{10}\right)$. Este tablero modificado es homeomorfo a un tablero de hexágonos de 11 por 11 como se explicó anteriormente y toda propiedad que cumpla uno de los tableros la cumplirá el otro. Así para este tablero se cumplirá el teorema del hex anteriormente mencionado: siempre se podrá unir con una curva los extremos opuestos del tablero al realizarse el juego. Obviamente este tablero modificado tendrá siempre un ganador.

Con estos gráficos en mente procederemos a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.2. (Teorema del punto fijo de Brouwer). Sea $f : I^2 \rightarrow I^2$ una función continua. Entonces existe un valor $x \in I^2$ tal que *f(x)=x.*

Demostración. Demostrar esto es equivalente a mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x \in I^2$ tal que $\left| f(x) - x \right| < \varepsilon$.

Supóngase que tenemos un $\varepsilon>0$. Dado que *f* es continua, escójase un punto que pertenezca a I^2; luego existirán x tal que si $|x-y|<\delta$ entonces $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, es decir, alrededor de *y* existirán puntos *x* que estarán tan próximos de *y*, como sus imágenes *f(x)* estarán tan próximas, como se quiera de *f(y).* Tomemos $\delta\leq\varepsilon$. Sea *k* un entero tal que $k>\frac{2}{\delta}$ y divídase I^2 en un cuadro del hex como se mostró anteriormente pero esta vez cada lado será dividido en k partes iguales. Sean V los vértices del cuadro del hex, y definase

$$\mathbf{H^+ = \{x\in V \,/\, f_1(x) - x_1 \geq \varepsilon\};\ H^- = \{x\in V \,/\, x_1 - f_1(x) \geq \varepsilon\}}$$
$$\mathbf{V^+ = \{x\in V \,/\, f_2(x) - x_2 \geq \varepsilon\};\ V^- = \{x\in V \,/\, x_2 - f_2(x) \geq \varepsilon\}}$$

donde $x = (x_1, x_2)$ recordando que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$**.**

¿Cómo son entonces estos puntos? Todo dependerá del punto que le corresponde por f, es decir, la ubicación de su imagen dentro de I^2. Véase un ejemplo en el gráfico siguiente:

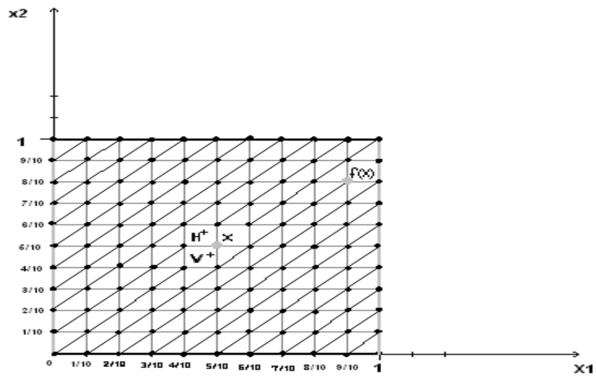

Figura 13. Vértices del tablero del hex

El punto blanco (gris) ubicado en el centro de coordenadas $\left(\frac{5}{10},\frac{5}{10}\right)$ podría tener como imagen por alguna función f el punto $\left(\frac{9}{10},\frac{8}{10}\right)$es decir $f\left(\frac{5}{10},\frac{5}{10}\right)=\left(\frac{9}{10},\frac{8}{10}\right)$ se tendría entonces los siguientes valores:

$x_1 = \frac{5}{10}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{5}{10}$

$f_1(x) = \frac{9}{10}$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{8}{10}$

$k = 10$, $\delta > \frac{2}{10}$ (Al menos, ya que se puede hacer el valor de δ muy pequeño haciendo que *k* sea grande).

$\varepsilon > \frac{2}{10}$ (Aplicando las condiciones impuestas inicialmente). De estos valores se tiene:

El punto $\left(\frac{5}{10},\frac{5}{10}\right)$ es un H^+ pues:

$$f_1(x) - x_1 = \frac{9}{10} - \frac{5}{10} = \frac{4}{10} \geq \varepsilon$$

Este punto no es un H^- pues:

$$x_1 - f_1(x) = \frac{5}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{4}{10}$$

Este punto es V^+ pues:

$$f_2(x) - x_2 = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10} \geq \varepsilon$$

Este punto no es V^- pues:

$$x_2 - f_2(x) = \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = -\frac{3}{10}$$

Es claro que ningún punto será H^+ y H^- al mismo tiempo, o V^+ y V^- al mismo tiempo. Además de ello para aquellos puntos x, y que cumplan $|x-y| < \delta$, se tendrá aquellos puntos x, y que cumplan $| x-y | < \delta$, se tendrá que los que sean H^+ no serán adyacentes a los que sean H^-, análogamente ocurrirá para los V^+ y los V^- (la palabra adyacente se debe entender en el sentido del juego del hex). Para demostrarlo, supóngase que dos puntos *x, y* con $x\in H^+$ e $y\in H^-$ son adyacentes, como $| x-y | < \delta \leq \varepsilon$ se tiene $| x-y | = \max\{ | x_1-y_1 |,| x_2-y_2 | \} < \delta \leq \varepsilon$

Siempre se tendrá que:

$$| x_1-y_1 | < \varepsilon, -\varepsilon < x_1-y_1 < \varepsilon$$

así que,

$$x_1-y_1 > -\varepsilon$$
$$f_1(x) - x_1 \geq \varepsilon \text{ (pues } x\in H^+)$$
$$\underline{y_1 - f_1(y) \geq \varepsilon \text{ (pues } y\in H^-)}$$

$$f_1(x) - f_1(y) > \varepsilon \text{ (sumando).} \quad (4.1)$$

Por continuidad de la función *f* nótese que si $| x-y | < \delta$ entonces $| f(x)-f(y) |<\varepsilon$, luego:

$$| f(x)-f(y) | = \max\{ |f_1(x)-f_1(y) |;| f_2(x)-f_2(y) | \}$$
$$| f_1(x)-f_1(y) | < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f_1(x)-f_1(y) < \varepsilon \quad (4.2)$$

lo cual lleva a una contradicción entre (4.1) y (4.2) . De forma análoga, se puede demostrar que ningún punto de V^+ será adyacente a algún punto de V^-

5. CONCLUSIONES

Si bien en ocasiones se utiliza la matemática para hacer análisis a muchos juegos y crear estrategias dentro de éstos, puede verse también como un juego, en este caso el juego del Hex puede ser utilizado para demostrar un teorema tan importante de la topología como lo es el teorema del punto fijo de Brouwer.

Se pudo demostrar de manera sencilla y con un lenguaje básico, sin referirse necesariamente a ecuaciones, el hecho de que el juego del Hex no termina en tablas. Este hecho fue fundamental ya que se propusieron ideas nuevas a las mencionadas por *David Gale* [3], las cuales fueron la base para que la demostración hecha en éste articulo fuese clara y además éstas ideas aportaron nuevas perspectivas en la consecución de estrategias de juego para el Hex.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) al igual que al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira.

7. BIBLIOGRAFIA

[1] N. Gonzalo. HEX. Online. Universidad Politécnica de Madrid. [Online]. Available: http://www.dma.fi.upm.es

[2] F. J. Cardona y R. A. Muriel. Uso del Hex en la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer. Ideas nuevas. Tesis de Licenciatura en Matemáticas y Física. Universidad Tecnológica de Pereira. 2007.

[3] D. Gale. The Game of Hex and Brouwer Fixed-Point Theorem. The American Matemathical Monthly, No.10, pp. 818-827 Vol.86, Diciembre.1979.

[4] J. A. Conway. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.