

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DIFERENCIAL DEFINIDO SOBRE UN DOMINIO HETEROGÉNEO 1D y 2D

### Numerical Solution of a Differential Problem Defined on Heterogeneous Domain 1D and 2D

#### RESUMEN

En este artículo se encuentra numéricamente el primer valor propio de una ecuación diferencial parcial definida sobre un dominio heterogéneo, considerando los casos unidimensional y bidimensional. Se utilizan como herramientas de solución numérica elementos de Teoría de Homogeneización y el Método de Diferencias Finitas.

**PALABRAS CLAVES:** Algoritmo de Thomas, Dominio Homogéneo, Dominio Heterogéneo, Ecuación de Ondas, Método de Homogeneización, Método de Diferencias Finitas, Método de la Potencia Inversa, Problema de Valores Propios.

#### ABSTRACT

*In this paper we find numerically the first eigenvalue of a partial differential equation defined on a heterogeneous domain, considering the one-dimensional and two-dimensional case. We use as tools of solution numeric elements of Homogenization Theory and Finite Differences Method.*

**KEYWORDS:** *Thomas's Algorithm, Homogeneous Domain, Heterogeneous Domain, Wave's Equation, Homogenization Method, Finite Difference Method, Inverse Power Method, Eigenvalue Problems.*

#### ALEX R. SEPÚLVEDA C.

Ingeniero Matemático.  
Licenciado en Ciencias de la Ingeniería.  
Estudiante de Doctorado en Ciencias Mención Matemática.  
Departamento de Ingeniería Matemática. Universidad de La Frontera. Temuco, Chile.  
asepulveda@ufro.cl

#### PEDRO PABLO CARDENAS A.

Licenciado en Matemática y Computación.  
Magíster en Enseñanza de la Matemática.  
Estudiante de Doctorado en Ciencias Mención Matemática, Universidad de La Frontera. Temuco, Chile.  
Profesor de Planta (Auxiliar), Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira.  
ppablo@utp.edu.co

### 1. INTRODUCCIÓN

Un material compuesto está formado por la combinación de varios constituyentes que difieren en su forma o composición en una macroescala. Hoy en día estos materiales son ampliamente estudiados y utilizados en distintas áreas de la producción, como por ejemplo, industria de la construcción, industria automotriz, aeronáutica e incluso medicina. En [5], por ejemplo, se realiza un estudio de las propiedades aislantes del hormigón liviano, que es una mezcla de arena, agua, cemento y esferas de poliestireno expandido.

En un buen material compuesto las heterogeneidades son muy pequeñas comparadas con las dimensiones globales del material y generalmente se asume que tienen una distribución periódica. Con esto, el material se puede considerar formado por la repetición de una celda de referencia que contiene la heterogeneidad. Desde el punto de vista de la modelación, esta periodicidad se representa mediante un pequeño parámetro  $\varepsilon$ .

Para introducir la formulación matemática de interés se sabe de la física (ver [4]) que el movimiento ondulatorio de un cuerpo homogéneo que ocupa un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , fijo en los bordes está gobernado por la ecuación de ondas

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} && \text{en } \Omega, \\ w &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Si se supone que su solución es de la forma  $w(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , se obtiene el siguiente problema de valores propios para el operador diferencial menos Laplaciano, donde  $\lambda = \frac{\omega^2}{v^2}$ ,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

En este trabajo se encuentra numéricamente el primer valor propio de una ecuación diferencial parcial con condiciones de borde Dirichlet homogénea, del tipo (1) – (2), pero definida sobre un dominio heterogéneo, considerando tanto el caso unidimensional, como bidimensional del modelo que se describe a continuación.

Para el caso unidimensional, se define la celda de referencia  $Y$  de longitud  $\varepsilon$ , dividida en  $Y_1$  (en gris) e

$Y_2$  (en negro) como se muestra en la Figura 1, tal que  $\bar{Y} = \bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$ ,  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ , de forma que en  $Y_1$  existe un material de densidad de masa uniforme  $\mu_1$  y en  $Y_2$  hay otro material, también de densidad de masa uniforme  $\mu_2$ , con  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

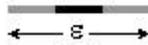


Figura 1. Celda de referencia unidimensional  $Y$ , ocupada por dos materiales con densidades de masa uniforme diferentes.

Así, se tiene que la densidad de masa en cada punto  $x$  de la celda está dada por

$$a(x) = \mu_1 \chi_1(x) + \mu_2 \chi_2(x),$$

donde  $\chi_i(x)$  es la indicatriz<sup>1</sup> del material  $i$ , con  $i = 1, 2$ . Ahora, se supone que la celda  $Y$ , se repite exactamente  $N$  veces en el dominio  $\Omega_1 = ]0, 1[$  cubriéndolo perfectamente, tal como se muestra en la Figura 2. Con esta construcción  $a(x)$  es  $Y$ -periódica sobre  $\Omega_1$ .



Figura 2. El dominio  $\Omega_1$ , formado por la repetición de  $N$  veces la celda de referencia  $Y$ .

Con esto se tiene que el modelo unidimensional a estudiar es

$$-\frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1. \quad (4)$$

donde se define  $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , para todo  $\varepsilon > 0$ .

Ahora, para el caso bidimensional, se considera la celda de referencia  $J$ , cuadrada de lado  $\varepsilon$ , dividida en  $J_1$  (en gris) y  $J_2$  (en negro), tal que  $\bar{J} = \bar{J}_1 \cup \bar{J}_2$ ,  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ , como se muestra en la Figura 3. Además, se supone que en  $J_1$  existe un material de densidad de masa uniforme  $\sigma_1$  y en  $J_2$  hay otro material de densidad de masa uniforme  $\sigma_2$ , tales que  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

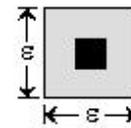


Figura 3. Celda de referencia bidimensional  $J$ , constituida por dos materiales con densidades de masa uniforme diferentes.

Si además se supone que el medio es isotrópico, se tiene que la densidad de masa de cualquier punto  $(x, y)$  de la celda está dada por

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma(x, y) & 0 \\ 0 & \sigma(x, y) \end{bmatrix},$$

donde  $\sigma(x, y) = \sigma_1 \chi_1(x, y) + \sigma_2 \chi_2(x, y)$  y  $\chi_i(x, y)$  es la indicatriz del material  $i$ , para  $i = 1, 2$ . Como antes, se considera que esta celda se repite exactamente  $N$  veces en la dirección  $x$  y  $N$  veces en la dirección  $y$  cubriendo perfectamente el dominio  $\Omega_2 = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  tal como se muestra en la Figura 4, obteniéndose  $A(x, y)$   $J$ -periódica sobre  $\Omega_2$ .

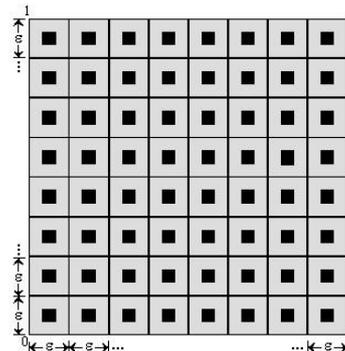


Figura 4. El dominio  $\Omega_2$ , formado por la repetición de  $N$  veces la celda de referencia  $J$ , en ambas direcciones  $x$  e  $y$ .

Con esta construcción se tiene que el modelo bidimensional a estudiar queda formulado como

$$-\text{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{en } \Omega_2, \quad (5)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_2. \quad (6)$$

Desde el punto de vista de la interpretación física, el problema de interés se puede entender como encontrar la frecuencia principal de vibración de una cuerda y de una placa cuadrada heterogéneas para el caso unidimensional y bidimensional respectivamente.

La estrategia de solución será aplicar elementos de Teoría de Homogeneización para obtener un problema homogeneizado equivalente al original y a este último aplicar el método de diferencias finitas, resolviendo el problema discreto por un método numérico *ad hoc*. En la siguiente sección se detallan estas ideas.

<sup>1</sup> La función indicatriz del material se define como

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y_i, \\ 0 & \text{si } x \notin Y_i. \end{cases}$$

**2. NOCIONES PRELIMINARES**

El objetivo de esta sección es entregar algunos conceptos elementales necesarios para encontrar la solución del problema de interés.

**2.1. NOCIONES DE HOMOGENEIZACIÓN**

El propósito de la Teoría de Homogeneización es establecer el comportamiento macroscópico de un sistema que contiene heterogeneidades microscópicas. La idea nace del hecho que al trabajar con materiales compuestos, los métodos numéricos clásicos para la resolución de ecuaciones diferenciales presentan problemas de convergencia o son simplemente inaplicables. Se referencia a [2] para más detalles al respecto.

Visto desde el punto de vista matemático la solución de un problema de valor de frontera dependiente de un pequeño parámetro converge a la solución de un problema de valor de frontera límite que es descrito explícitamente.

Para fijar ideas, sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un abierto acotado e  $Y$  una celda de referencia,  $Y_1 \subset Y$ ,  $Y_2 \subset Y$ , tal que  $\bar{Y} = \bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$ ,  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ . Además, se considera  $\varepsilon > 0$  un pequeño parámetro que toma valores en una sucesión que tiende a cero y se define los conjuntos

$$\Omega_1^\varepsilon = \{x \mid \chi_1(x) = 1\},$$

$$\Omega_2^\varepsilon = \Omega - \Omega_1^\varepsilon = \{x \mid \chi_2(x) = 1\}.$$

Bajo esta construcción  $\Omega$  es cubierto por un embalosado de celdas de la forma  $\varepsilon Y = \varepsilon Y_1 \cup \varepsilon Y_2$  tal que al tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$  las celdas que cubren  $\Omega$  son cada vez más pequeñas y su número tiende a infinito, mezclándose los materiales en el sentido que las heterogeneidades son cada vez más pequeñas.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha < \beta$ . Se denota por  $M(\alpha, \beta, \Omega)$  al conjunto de las matrices  $A^\varepsilon(x) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq d} \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$  de  $d \times d$  tal que

$$(A(x)y, y) \geq \alpha \|y\|^2,$$

$$\|A(x)y\| \leq \beta \|y\|,$$

$\forall y \in \mathbb{R}^d$ , casi en todas partes (c.t.p.) sobre  $\Omega$ .

Sea la sucesión de matrices no constantes  $A^\varepsilon$ ,  $Y$  –periódicas definidas por

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ c.t.p. sobre } \mathbb{R}^d, \forall i, j = \overline{1, d}. \quad (7)$$

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq d}. \quad (8)$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in M(\alpha, \beta, Y), \quad Y \text{ –periódica.} \quad (9)$$

Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  se tiene la ecuación diferencial parcial con condición de borde Dirichlet homogénea clásica en Teoría de Homogeneización, la cual admite solución única para todo  $\varepsilon > 0$  fijo (ver [2], Capítulo 5),

$$-div(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{en } \Omega, \quad (10)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (11)$$

En [2], Capítulo 8, se demuestra el siguiente resultado, que asegura la convergencia entre la solución del problema heterogéneo y la solución del homogeneizado.

**Teorema 2.1.2.** Sea  $u^\varepsilon$  solución de (10) – (11) con  $A^\varepsilon$  satisfaciendo (7) – (9). Entonces,

$$u^\varepsilon \xrightarrow{w} u^0 \quad \text{débil en } H_0^1(\Omega),$$

$$A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{w} A^0 \nabla u^0 \quad \text{débil en } (L^2(\Omega))^d,$$

donde  $u^0$  es la única solución en  $H_0^1(\Omega)$  del problema homogeneizado

$$-div(A^0 \nabla u^0) = f \quad \text{en } \Omega,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

La matriz  $A^0 = (a_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq d}$  es constante, elíptica y está completamente determinada por la relación

$$A^0 v = \overline{M}_Y(A \nabla \widehat{w}_v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, \quad (12)$$

tal que  $\widehat{w}_v$  está dada por el problema

$$-div(A(y) \nabla \widehat{w}_v) = 0 \quad \text{en } Y, \quad (13)$$

$$\widehat{w}_v - v \cdot y \quad Y\text{-periódica}, \quad (14)$$

$$\overline{M}_Y(\widehat{w}_v - v \cdot y) = 0, \quad (15)$$

donde  $\overline{M}_Y(\cdot)$  denota el valor medio<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Se define el valor medio de una función  $g$  integrable sobre  $\Omega$  como

$$\overline{M}_\Omega(g) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g(x) dx,$$

donde  $|\Omega|$  denota la medida de  $\Omega$ .

También en [2], Capítulo 6, se demuestra un resultado que permite calcular explícitamente los coeficientes homogeneizados, el que se detalla en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $A^0$  la matriz definida en (12) y  $\widehat{w}_i = \widehat{w}_{e_i}$  según (13) – (15). Entonces,*

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \sum_{k,l=1}^d \int_Y a_{kl} \frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \widehat{w}_i}{\partial x_k} dy \quad \forall i, j = \overline{1, d},$$

donde se elige  $v = e_i$  la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ .

Para el caso unidimensional, en [3] se muestra que el coeficiente homogeneizado se calcula mediante la expresión

$$a^0 = \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{dx}{a(x)} \right)^{-1}.$$

**2.2. NOCIONES DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS**

Puesto que el Método de Diferencias Finitas es bastante conocido y estudiado en cualquier curso de Análisis Numérico sólo se comenta la idea general del método e introducen los operadores de diferencias que se utilizarán en el desarrollo del problema de interés. Para más detalles se referencia a [1], Capítulo 2.

La idea principal del Método de Diferencias Finitas es aproximar la derivada de una función mediante una expresión de la forma

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\pm h_i} (g(x \pm e_i h_i) - g(x)),$$

donde  $h_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector de incrementos  $h = (h_1, \dots, h_d)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . Se observa que tomando el signo positivo en la expresión anterior se tiene el llamado operador diferencias Forward y con el negativo se tiene el operador de diferencias Backward.

Con estos operadores se puede transformar un problema diferencial con condiciones de borde en un sistema de ecuaciones, obteniendo la solución de este mediante los métodos numéricos clásicos.

**3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA 1D Y 2D**

En esta sección se encuentra el primer valor propio para los modelos (3) – (4) y (5) – (6). Los resultados numéricos se obtuvieron programando las rutinas en

Scilab 4.1.2, ejecutadas en un computador con memoria RAM 512 MB y procesador Pentium IV de 2.0 GHz.

**3.1. CASO UNIDIMENSIONAL**

En primer lugar se aplica el Método de Diferencias Finitas al problema heterogéneo (3) – (4), para ello se divide el dominio  $\Omega_1$  en  $n$  partes iguales, es decir, se

toma como tamaño de paso  $h = \frac{1}{n}$ . Dado que la celda

periódica  $Y$  se repite  $N$  veces en el dominio y está formada por tres partes iguales ( $Y_1$  correspondiente a los extremos e  $Y_2$  correspondiente a la parte central) se debe cumplir que  $3N$  divide a  $n$ . Así, cada celda periódica será

dividida en  $p = \frac{n}{3N}$  partes iguales. Se define

$$\Omega_{11}^\varepsilon = \{x \mid \chi_1(x) = 1\},$$

$$\Omega_{12}^\varepsilon = \Omega_1 - \Omega_{11}^\varepsilon = \{x \mid \chi_2(x) = 1\}.$$

Con esto, aplicando el operador de diferencias Forward, se tiene la discretización para  $i = \overline{1, n-1}$ .

$$-\frac{\mu_1}{h^2} \{u_{i+1}^\varepsilon - 2u_i^\varepsilon + u_{i-1}^\varepsilon\} = \lambda_h^\varepsilon u_i^\varepsilon \quad \text{si } u_i^\varepsilon \in \Omega_{11}^\varepsilon,$$

$$-\frac{\mu_2}{h^2} \{u_{i+1}^\varepsilon - 2u_i^\varepsilon + u_{i-1}^\varepsilon\} = \lambda_h^\varepsilon u_i^\varepsilon \quad \text{si } u_i^\varepsilon \in \Omega_{12}^\varepsilon,$$

$$u_0^\varepsilon = 0 = u_n^\varepsilon.$$

Lo anterior es un problema de valores propios para la matriz del sistema lineal de  $(n-1) \times (n-1)$ , tridiagonal y simétrica. Para encontrar el menor de sus valores propios se utiliza el Método de la Potencia Inversa (ver [1]) y para resolver los sistemas derivados de este, se utiliza el Algoritmo de Thomas (ver [6]), que aprovecha el hecho de la tridiagonalidad. En la Tabla 1 se muestran las aproximaciones obtenidas considerando  $\mu_1 = 1$  y  $\mu_2 = 2$ ,  $t$  denota el tiempo de ejecución de las rutinas programadas computacionalmente.

$N$	$n$	$\lambda_h^\varepsilon$	$t$
1	12	13.841065735	0.125''
2	12	11.708396102	0.25''
50	450	11.843400187	0.375''
500	4500	11.843524030	9''
5000	30000	11.843525261	1'1''
10000	60000	11.843525277	2'2''
18000	162000	11.843525281	5'28''

Tabla 1. Aproximaciones obtenidas para el problema unidimensional heterogéneo.

Por otro lado, aplicando la expresión para el coeficiente homogeneizado vista en la Sección 2.1 se encuentra que

$a^0 = \frac{3\mu_1\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}$ . Con ello el problema homogeneizado queda expresado como

$$-a^0 \frac{d^2 u^0}{dx^2} = \lambda^0 u^0 \quad \text{en } \Omega_1,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1.$$

Cuyo primer valor propio se calcula fácilmente, siendo  $\lambda^0 = a^0 \pi^2$ . Para los valores de densidades de masa considerados se tiene  $\lambda^0 = 11.843525281$ .

### 3.2. CASO BIDIMENSIONAL

Para el problema heterogéneo (5) – (6), se utiliza la estrategia de discretización del caso anterior. Se define

$$\Omega_{21}^\varepsilon = \{x \mid \chi_1(x) = 1\},$$

$$\Omega_{22}^\varepsilon = \Omega_2 - \Omega_{21}^\varepsilon = \{x \mid \chi_2(x) = 1\},$$

y aplicando los operadores de diferencias Forward y luego Backward se obtiene la discretización

$$-\frac{\sigma_1}{h^2} \{u_{i+1,j}^\varepsilon + u_{i-1,j}^\varepsilon - u_{i,j}^\varepsilon + u_{i,j+1}^\varepsilon + u_{i,j-1}^\varepsilon\} = \lambda_h^\varepsilon u_{i,j}^\varepsilon,$$

si  $u_{i,j}^\varepsilon \in \Omega_{21}^\varepsilon$ ,

$$-\frac{\sigma_2}{h^2} \{u_{i+1,j}^\varepsilon + u_{i-1,j}^\varepsilon - u_{i,j}^\varepsilon + u_{i,j+1}^\varepsilon + u_{i,j-1}^\varepsilon\} = \lambda_h^\varepsilon u_{i,j}^\varepsilon$$

si  $u_{i,j}^\varepsilon \in \Omega_{22}^\varepsilon$  y para el borde del dominio  $\Omega_2$ ,

$$u_{i,0}^\varepsilon = u_{n,j}^\varepsilon = u_{i,n}^\varepsilon = u_{0,j}^\varepsilon = 0, \quad \forall i, j = \overline{0, n}.$$

Lo anterior corresponde a un problema de valores propios para la matriz del sistema lineal de  $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ , tridiagonal por bloques y simétrica. Si se considera  $\sigma_1 = 1$  y  $\sigma_2 = 2$  se obtienen las siguientes aproximaciones del primer valor propio.

N	n	$\lambda_h^\varepsilon$	t
1	12	19.944033	0.016''
2	12	19.678256	0.031''
5	60	19.740866	6''
10	120	19.739598	1'42''
20	240	19.739305	26'22''

Tabla 2. Aproximaciones obtenidas para el problema bidimensional heterogéneo.

Por otro lado, para homogeneizar el problema, se debe encontrar previamente la solución de los dos problemas auxiliares (13) – (15), escogiendo como  $v = e_k$ , para  $k = 1, 2$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Su discretización es

$$\hat{w}_{i+1,j}^k - 4\hat{w}_{i,j}^k + \hat{w}_{i,j+1}^k + \hat{w}_{i,j-1}^k = 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n-1},$$

$$\hat{w}_{i,0}^k - \hat{w}_{i,n}^k = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1},$$

$$\hat{w}_{0,j}^k - \hat{w}_{n,j}^k = -\frac{1}{N} \quad \forall j = \overline{0, n-1},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (\hat{w}_{ij}^k - ih) = 0$$

$$\hat{w}_{i+1,0}^k - 4\hat{w}_{i,0}^k + \hat{w}_{i,1}^k + \hat{w}_{i,n-1}^k = 0 \quad \forall i = \overline{1, n-1},$$

$$\hat{w}_{1,j}^k - 4\hat{w}_{0,j}^k + \hat{w}_{n,1,j}^k + \hat{w}_{0,j-1}^k = 0 \quad \forall j = \overline{1, n-1},$$

para  $k = 1, 2$ , correspondiente a un sistema de  $n^2$  ecuaciones lineales con  $n^2$  incógnitas. En la Figura 5, se muestra la solución  $\hat{w}^1(x, y)$  asociada al vector  $e_1$ , obtenida para  $n = 21$  y  $N = 20$ . La función  $\hat{w}^2(x, y)$  asociada a  $e_2$  es similar, pero girada en  $90^\circ$  en sentido antihorario con eje de rotación vertical.

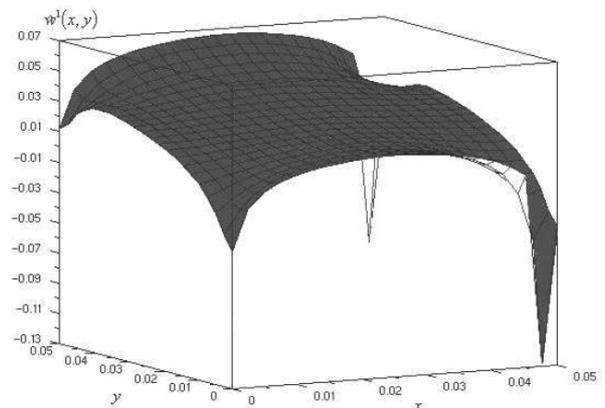


Figura 5. Solución del problema auxiliar asociado a  $e_1$ .

De la Proposición 2.1.3. los coeficientes homogeneizados están dados por

$$a_{11}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(x, y) \left\{ \left( \frac{\partial \hat{w}^1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{w}^1}{\partial y} \right)^2 \right\} dy dx,$$

$$a_{12}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(x, y) \left\{ \frac{\partial \hat{w}^1}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}^2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}^1}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}^2}{\partial y} \right\} dy dx,$$

$$a_{21}^0 = a_{12}^0,$$

$$a_{22}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(x, y) \left\{ \left( \frac{\partial \hat{w}^2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{w}^2}{\partial y} \right)^2 \right\} dy dx.$$

Calculadas numéricamente estas expresiones se obtiene la matriz homogeneizada del problema (5) – (6),

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2.256909 & 3.505246 \\ 3.505246 & 17.494954 \end{bmatrix},$$

el cual queda escrito como

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) &= \lambda^0 u^0 && \text{en } \Omega_2, \\ u^0 &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

Su discretización vía operadores de diferencias es

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2} \{ \gamma u_{i+1,j}^0 - 2\delta u_{i,j}^0 + \mu u_{i-1,j}^0 + \eta u_{i,j+1}^0 + \eta u_{i,j-1}^0 \\ - a_{12}^0 (u_{i+1,j-1}^0 + u_{i-1,j+1}^0) \} &= \lambda_h^0 u_{i,j}^0 \quad \forall i, j = \overline{1, n-1}, \\ u_{i,0}^0 = u_{n,j}^0 = u_{i,n}^0 = u_{0,j}^0 &= 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

donde  $\gamma = a_{11}^0 + a_{12}^0$ ,  $\delta = \gamma + a_{22}^0$  y  $\eta = a_{12}^0 + a_{22}^0$ . Para los valores de parámetros consideramos se obtienen las aproximaciones mostradas en la Tabla 3.

$n$	$\lambda_h^0$	$t$
80	189.47819	39''
100	189.46886	1'37''
120	189.46374	6'19''
140	189.46064	5'42''
160	189.45862	9'37''

Tabla 3. Aproximaciones obtenidas para el problema bidimensional homogeneizado.

Puesto que la matriz de la discretización del problema heterogéneo es tridiagonal por bloques se implementó el algoritmo de Thomas para este tipo de estructura matricial.

Existe una gran diferencia entre los resultados mostrados en las Tablas 2 y 3. Esto es consecuencia de todas las aproximaciones realizadas para calcular los coeficientes homogeneizados, puesto que es necesario derivar numéricamente y luego integrar numéricamente una solución obtenida numéricamente, esto como es lógico arrastra errores. Además las funciones  $\hat{w}^k$  no son muy regulares en los bordes de la celda  $J$ , puesto que tienen una pronunciada pendiente (ver Figura 5). Una solución natural es tomar operadores de diferencias que consideren más puntos, pero en la práctica tampoco resuelve esta problemática. Respecto al cálculo numérico de las integrales se realizó inscribiendo paralelepípedos de base cuadrada y altura la imagen correspondiente a los nodos  $(i, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$  y  $(i + 1, j + 1)$ , para luego tomar promedio entre los cuatro volúmenes encontrados,  $\forall i, j = \overline{0, n-1}$ .

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se aplicó elementos de Teoría de Homogeneización y el Método de Diferencias Finitas para encontrar el primer valor propio de un problema diferencial definido en un dominio heterogéneo.

Una posible mejora a los resultados se obtendría cambiando el Método de Diferencias Finitas, por el Método de Elementos Finitos que está mejor adaptado a las ecuaciones diferenciales parciales y modificando el método de integración bidimensional a uno más óptimo.

En problemas más complejos, donde los coeficientes de densidad de masa varían en cada punto de la celda de referencia, se refleja claramente el comportamiento anómalo de la solución del problema heterogéneo, que nunca llega a converger a la solución del problema homogeneizado. Es en casos como esos donde la Teoría de Homogeneización ofrece una solución de calidad.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Centro de Excelencia en Modelación y Computación Científica, perteneciente a la Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

#### 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. G. Ciarlet, “Introduction à L’analyse Numérique et L’optimisation”, Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Dunod, Paris 1998.
- [2] D. Cioranescu, P. Donato, “An Introduction to Homogenization”, Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications 17, Oxford University Press, 1999.
- [3] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, “Une Méthode D’Étude du Comportement Global des Matériaux Composites : L’Homogénéisation”, Images des Mathématiques 69 (1988), pp 13 – 23.
- [4] P. M. Morse, “Vibrations and Sound”, International Series in Pure and Applied Physics, McGraw Hill, 1948.
- [5] A. Sepúlveda C., “Aplicación del Método de Homogeneización a un Problema de Aislación Acústica en Paneles de Hormigón Liviano”, Tesis para Optar al Título de Ingeniero Matemático, Universidad de La Frontera. Temuco, Chile, 2006.
- [6] J. W. Thomas, “Numerical Partial Differential Equations, Finite Difference Methods”, TAM 22, Springer, 1995.