

## EL MAPA DE HÉNON COMO FUNCIÓN DE TIEMPO UNITARIA DE UN CAMPO VECTORIAL

### The Hénon map as time one map of a vectorial field

#### RESUMEN

En este trabajo se presentaran condiciones bajo las cuales un difeomorfismo es función de tiempo unitario de un campo vectorial. En particular, se tratará el sistema dinámico conocido como mapa de Hénon. Se determinaran valores de los parámetros para los cuales el mapa de Hénon es función de tiempo unitario de un campo vectorial.

**PALABRAS CLAVES:** Difeomorfismo, funciones de tiempo unitario, mapa de Hénon.

#### ABSTRACT

*In this work we present sufficient conditions under which a given diffeomorphism is time one map of a vector field. As a example, we analyze the famous Hénon map for certain values of its parameters and numerically approximate it correspondingly vector field.*

**KEYWORDS:** Diffeomorphisms, Henon map, time one maps.

#### 1. INTRODUCCIÓN

En la teoría de ecuaciones diferenciales es conocido que dado un campo vectorial  $f$  definido en una región invariante  $\Omega \subseteq R^n$ , el problema de valor inicial  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , define un flujo  $\Phi_f$  tal que para todo  $t \in R$ , la aplicación  $x \rightarrow \Phi_f(., x)$  determina un difeomorfismo de  $\Omega$  en sí mismo. Cuando  $t = 1$ , el difeomorfismo  $\Phi_f(1, .)$  se llama aplicación de tiempo unitario asociado a  $f$ .

Determinar la función de tiempo unitario a partir del campo vectorial se suele llamar el *problema directo* en ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideremos ahora el *problema inverso*: dado un difeomorfismo  $g$  de  $\Omega \subseteq R^n$  en sí mismo, determinar si existe un campo vectorial  $f$  que tenga a  $\Omega$  como invariante, y tal que su aplicación de tiempo unitario coincida con  $g$ .

Una motivación para estudiar este problema se establece en un contexto dinámico donde  $\Omega$  es el universo, el campo  $f$  es la ley que lo gobierna y el flujo  $\Phi_f(., x_0)$  es la evolución en el tiempo de un estado  $x_0 \in \Omega$ . Puede pensarse en  $\Phi_f(t, .)$  como la fotografía del sistema en un tiempo  $t$  fijo de su evolución. La pregunta en este contexto es: ¿Puede recobrase la ley de evolución del universo a partir de una fotografía?

Fecha de Recepción: 24 de Enero de 2008  
Fecha de Aceptación: 13 de Mayo de 2008

**ALEXÁNDER GUTIÉRREZ**

Matemático, M. Sc.

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

alexguti@utp.edu.co

En el caso de una dimensión (intervalos y círculos) el problema está completamente resuelto. Las referencias son aquí, Lam [5], Maoan [6], Zdun [8]. En cambio, para dominios de  $R^n$ ,  $n > 1$  hay apenas resultados parciales. Arango y Gómez en [1,2] demostraron que si  $g$  satisface cierta hipótesis, que se especificará más adelante, entonces  $g$  es función de tiempo unitario de un campo vectorial  $f$ . Más aún,  $f$  se puede aproximar mediante una sucesión de funciones.

En este artículo se presentaran los resultados obtenidos [4]. En concreto, si se aplican los resultados de [1,2] al mapa de Hénon  $H(x, y) = (a - by - x^2, x)$ , determinando para qué valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  el mapa de Hénon es la función de tiempo unitario de un campo.

#### 2. PRELIMINARES

El propósito se establecer la notación y el lenguaje necesario para el planteamiento del problema central de este artículo. En lo que sigue  $\Omega$  es un abierto conexo de  $R^n$ . El problema de valor inicial

$$x' = f(x) \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

Asociado al campo vectorial autónomo (no dependiente del tiempo)  $f : \Omega \rightarrow R^n$ , el que se supone lo suficientemente regular,  $f \in C^p(\Omega, R^n)$ , para un  $p$  lo suficientemente grande, se tiene que (1) satisface el teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales.

**Teorema 1.** Para todo  $x_0 \in \Omega$  existe un intervalo abierto maximal  $I \subseteq R$  que depende de  $x_0$ , y una única solución  $\Phi_f : (., x_0) \rightarrow \Omega$  del problema de valor inicial (1).

La notación  $\Phi_f(., x_0)$  destaca la dependencia de la solución del campo  $f$ . La aplicación  $\Phi_f(., .)$  se llama flujo asociado al campo  $f$ . Bajo ciertas circunstancias ver [3] se puede garantizar que el intervalo  $I$ , al que se refiere el teorema 1, satisface  $I = R$ , en este caso se tienen las siguientes propiedades del flujo:

- Para todo  $x \in \Omega$ , la aplicación  $\Phi_f : (., x_0) \rightarrow \Omega$  es de clase  $p+1$ .
- Para todo  $s, t \in R$ , y todo  $x \in \Omega$  se tiene la propiedad de semigrupo  

$$\Phi_f(t+s, x) = \Phi_f(t, \Phi_f(s, x)).$$
- Para todo  $t \in R$ , la aplicación  

$$\Phi_f(t, .) : \Omega \rightarrow \Omega$$
 es un difeomorfismo de  $\Omega$  es sí mismo.

Por simplicidad en la notación se escribió  $x$  en lugar de  $x_0$ . La aplicación  $\Phi_f(., .)$  resuelve el problema directo en ecuaciones diferenciales ordinarias, que consiste en hallar el flujo asociado a un campo vectorial  $f$  dado, o equivalentemente, para cada  $t$  se determina el difeomorfismo  $\Phi_f(t, .)$ . El difeomorfismo correspondiente a  $t=1$ , es decir,  $\Phi_f(1, .)$  se llama función de tiempo unitario asociado al campo  $f$ .

### 3. FLUJOS Y DIFEOMORFISMO

En esta sección se tratara del *problema inverso*:

Dado un difeomorfismo  $g$  con dominio en  $\Omega \subseteq R^n$ , hallar, si existe, un campo vectorial  $f$  de clase  $C^1$  que resuelva

$$\Phi_f(1, x) = g(x) \quad x \in \Omega \quad (2)$$

donde  $\Phi_f(., .)$  es el flujo correspondiente al campo  $f$ .

El propósito de esta sección es dar condiciones suficientes a fin de que (2) tenga una solución  $f$ . Primero se abordara el problema directo, bien conocido y estudiado. Se mostrara que el flujo  $\Phi_f(., .)$  satisface

ciertas propiedades, que indican el camino para resolver parcialmente el problema inverso.

Se mostrara además, que si  $\tilde{x}$  es un punto fijo de  $g$  el conjunto de soluciones  $f$  de (2) es isomorfo al conjunto de matrices reales de orden  $m$  definido por  $\log(A) = \{B : \exp(B) = A\}$  donde  $A = Dg(x)$ .

#### 3.1 EL PROBLEMA DIRECTO

Se retoma el problema (1) y se muestran algunas propiedades del flujo  $\Phi_f$  que serán útiles para demostrar la dependencia de la función de tiempo unitario  $g(x) = \Phi_f(1, x)$  con respecto al campo  $f$ , el cual se supone conocido en el problema directo. La idea es que estos resultados orienten la solución del problema inverso, en donde la función de tiempo unitario es un dato del problema y el campo  $f$  es la incógnita.

Se recapitulara ahora un resultado elemental de la teoría de ecuaciones lineales ordinarias. Suponga que  $A(t)$  es una aplicación continua de  $R$  en el espacio de matrices reales de orden  $n$ . Entonces la solución del problema matricial de valor inicial  $y(t)$  de

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad y(0) = I_n, \quad (3)$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ , satisface

$$\det y(t) = \exp\left(\int_0^t \text{tr}(A(s)) ds\right) \quad (4)$$

Considere la solución  $\Phi_f(t, x)$  del problema (1). Como se sabe (ver propiedades de los flujo),  $\Phi_f(t, x)$  depende de manera continuamente diferenciable tanto de  $x$  como de  $t$ . Más aún,  $z(t) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Phi_f(t, x)$ , satisface la ecuación (3) con  $A(t) = Df(\Phi_f(t, x))$ .

Observe que si  $x = \tilde{x}$  es un equilibrio se tiene que  $A(t) = Df(\tilde{x})$  es una matriz constante, y la ecuación (3) se transforma en  $z'(t) = Df(\tilde{x})z(t)$ ,  $z(0) = I_n$ , la anterior ecuación diferencial es lineal con coeficientes constantes y tiene como solución  $z(t) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Phi_f(t, \tilde{x})$ ,

con  $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_f(t, \tilde{x}) = \exp(tDf(\tilde{x}))$ . Por tanto,  $\exp Df(\tilde{x}) = A$  es una relación entre la parte lineal  $A = Dg(\tilde{x})$  de  $g$  y la parte lineal  $Df(\tilde{x})$  de  $f$ . Adicionalmente, de la ecuación (4) se obtiene

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi_f(t, \tilde{x})\right) = \exp\left(\int_0^t \text{tr}(Df(\tilde{x}))ds\right).$$

Luego, una condición necesaria para que  $g$  sea la función de tiempo unitario del flujo  $\Phi_f$  es  $\det(A) > 0$ .

**Lema 2.** Para todo  $t \in R$ ,  $x \in \Omega$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi_f(t, x)f(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_f(t, x) = f(\Phi_f(t, x)).$$

**Demostración.** Véase [1].

De acuerdo al Lema anterior se tiene que  $Dg(x)f(x) = f(g(x))$  y al reemplazar  $g(x)$  por  $x$  se obtiene  $Dg(g(x))f(g(x)) = f(g(g(x)))$ , en consecuencia,  $f(x) = (Dg^2(x))^{-1}f(g^2(x))$ . Luego la iteración  $n$ -ésima es:

$$f(x) = (Dg^n(x))^{-1}f(g^n(x)).$$

El problema inverso tiene solución si  $g$  satisface la siguiente hipótesis:

**Hipótesis A** Sea  $g \in C^2(\Omega)$  un difeomorfismo con un único punto fijo  $\tilde{x} \in \Omega$ , tal que la parte lineal  $A = Dg(\tilde{x})$  satisfaga  $\det(A) > 0$  y  $r^2 < l$ , donde  $r$  y  $l$  representan, en módulo, el máximo y el mínimo de los valores propios de  $A$  respectivamente.

El siguiente teorema sugiere una técnica para la construcción del campo  $f$  en el problema inverso.

**Teorema 3.** Si  $g$  cumple la Hipótesis A y es la función de tiempo unitario de un flujo  $\Phi_f$  entonces

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Dg^n(x))^{-1} Df(x)(g^n(x) - \tilde{x}), \quad x \in \Omega$$

**Demostración.** Véase [1]-[4].

### 3.2 EL PROBLEMA INVERSO

El teorema 3 indica una estrategia para demostrar la existencia de una solución de (2) por medio de la sucesión

$$f_n(x) = (Dg^n(x))^{-1} B(g^n(x) - \tilde{x}), \quad n \in N, \quad (5)$$

donde  $B$  es una matriz de orden  $n$ .

**Lema 4.** Sean  $A = Dg(x)$  y  $B$  matrices  $m \times m$  tales que  $AB = BA$ . Si  $g$  es un difeomorfismo que cumple

la Hipótesis A, entonces existe  $\delta > 0$  tal que las sucesiones  $(f_n(x))_{n \in N}$  dada en (5) y  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_n(x)\right)_{n \in N}$  convergen uniformemente para  $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ . Más aún, si  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  entonces  $Df(\tilde{x}) = B$ .

**Demostración.** Ver [1].

Note que la convergencia de (5) es local y que para cada  $B$  que cumple con las hipótesis del Lema 4 existe un  $f$ . Se puede deducir una importante relación entre  $f$  y  $g$ . En primer lugar observe

$$f(g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Dg^n(g(x)))^{-1} B(g^{n+1}(x) - \tilde{x})$$

y observe en segundo lugar

$$(Dg^{n+1}(x))^{-1} = (Dg(x))^{-1} (Dg^n(g(x)))^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= Dg(x) \lim_{n \rightarrow \infty} (Dg^{n+1}(x))^{-1} Df(\tilde{x})(g^{n+1}(x) - \tilde{x}) \\ &= Dg(x) f(x) \end{aligned}$$

Una consecuencia importante de lo anterior es:  $g(x(t))$  y  $g^{-1}(x(t))$  son soluciones de  $x' = f(x)$  siempre que  $x(t)$  sea solución. Entonces se obtiene,

$$g^{-1}(\Phi_f(t, g(x_0))) = \Phi_f(t, x_0), \quad \Phi_f(t, g(x_0)) = g(\Phi_f(t, x_0))$$

La ecuación anterior indica que  $G = \{g^n : n \in Z\}$  es un grupo de simetría para el flujo  $\Phi_f$ .

Ahora el objetivo se centra en dar condiciones para que  $g$  sea la función de tiempo unitario del flujo  $\Phi_f$ , donde  $f$  es el campo cuya existencia esta garantizado por el Lema 4. Observe que si  $f_n$  esta definido por (5), el flujo  $\Phi_{f_n}$  satisface

$$\Phi_{f_n}(t, x) = g^{-n}(\exp(Bt)g^n(x))$$

En efecto, se tiene

$$x'(t) = f_n(x(t)) = (Dg^n(x(t)))^{-1} Bg^n(x(t)),$$

que al hacer el cambio de variable  $y(t) = g^n(x(t))$  se transforma en  $y'(t) = By(t)$ , cuya solución es

$$y(t) = \exp(Bt)y_0.$$

El siguiente teorema da condiciones bajo las cuales  $g$  es solución de (2).

**Teorema 5.** Si  $g$  satisface la Hipótesis A y existe una matriz  $B$ ,  $m \times m$  tal que  $\exp(B) = A$  entonces

existe  $\delta > 0$  tal que  $g$  es la función de tiempo unitario del flujo  $\Phi_f$  para  $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ , donde  $f$  es el límite de la sucesión  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  dada en (5).

**Demostración.** Ver [1].

**4 EL MAPA DE HENON**

El modelo propuesto por Henon, al que se hará referencia como el mapa de Henon, está definido mediante:

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ H(x, y) = (a - by - x^2, x) \tag{6}$$

Donde  $a, b$  son parámetros reales. A continuación se discutirán propiedades del mapa  $H$  que son de interés en este trabajo.

Primero observe que la matriz jacobiana  $DH(x, y)$  tiene determinante constante. En efecto,

$$DH(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \det(DH(x, y)) = b.$$

Si  $b \neq 0$ , la transformación inversa de  $H$  es

$$H^{-1}(x, y) = \left( y, \frac{a - x - y^2}{b} \right).$$

Otra propiedad interesante es que

$$H(x, y) \text{ y } H^{-1}(x, y) := \left( y, \frac{A - x - y^2}{B} \right),$$

con  $A = a/b^2$ ,  $B = 1/b$  son topológicamente conjugadas vía  $Q(x, y) = b(y, x)$ . En consecuencia, para el estudio de la dinámica de  $H$  es suficiente considerar valores del parámetro  $b$  tales que  $0 < b \leq 1$ .

**4.1 PUNTOS FIJOS Y ESTABILIDAD**

En el análisis de puntos fijos y estabilidad se discutirá el caso  $0 < b < 1$  por las observaciones que se hicieron sobre la ecuación (4).

Para encontrar los puntos fijos de  $H$  es necesario resolver la ecuación  $H(x, y) = (x, y)$ . Cálculos elementales muestran que los puntos fijos están dados por  $P_1 = -(p_1, p_1)$ ,  $P_2 = -(p_2, p_2)$ ,

donde  $-p_1, -p_2$  son las raíces del polinomio  $a - (b+1)x - x^2$ . Se tiene que

$$p_1 = \frac{(1+b) + \sqrt{4a + (1+b)^2}}{2}, \quad p_2 = \frac{(1+b) - \sqrt{4a + (1+b)^2}}{2}$$

Observe que la existencia y número de puntos fijos depende de los valores que tomen los parámetros  $a$  y  $b$ . A este respecto se distinguen tres regiones paramétricas  $I, II$  y  $III$  (ver figura 1) definidas por:

$$I = \left\{ (a, b) : a < -\left(\frac{1+b}{2}\right)^2, 0 < b < 1 \right\}, \\ II = \left\{ (a, b) : -\left(\frac{1+b}{2}\right)^2 < a < 3\left(\frac{1+b}{2}\right)^2, 0 < b < 1 \right\} \\ III = \left\{ (a, b) : a \geq 3\left(\frac{1+b}{2}\right)^2, 0 < b < 1 \right\}.$$

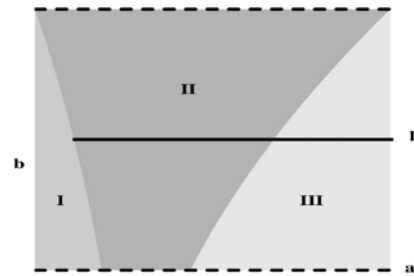


Figura 1. Regiones que determinan los puntos fijos de  $H$ .

Ahora bien, si  $(a, b) \in II \cup III$  entonces  $H$  tiene dos puntos fijos  $P_1$  y  $P_2$ . En contraste,  $H$  no tiene puntos fijos reales si  $(a, b) \in I$ . Finalmente, si  $(a, b)$  está en la frontera de las regiones  $I$  y  $II$  entonces  $H$  tiene a  $-(1+b)/2, (1,1)$  como único punto fijo.

Con el fin de estudiar la estabilidad de los puntos fijos se considerara la recta

$$l := \left\{ (a, b) : -\left(\frac{1+b}{2}\right)^2 \leq a < \infty \right\},$$

donde  $0 < b < 1$  es un valor fijo del parámetro (ver figura 1).

Cuando  $(a, b) \in l \cap (II \cup III)$ ,  $H$  tiene dos puntos fijos  $P_1, P_2$ . Los valores propios asociados a  $P_1$  son

$$\beta_1 = p_1 + \sqrt{p_1^2 - b}, \quad \beta_2 = p_1 - \sqrt{p_1^2 - b}$$

y los asociados a  $P_2$  están dados por

$$\lambda_1 = p_2 + \sqrt{p_2^2 - b}, \quad \lambda_2 = p_2 - \sqrt{p_2^2 - b} \tag{7}$$

Ahora bien, si  $(a, b) \in l \cap (II \cup III)$  entonces  $|\beta_1| > 1, |\beta_2| < 1$ . En consecuencia,  $P_1$  es inestable. Si  $(a, b) \in l \cap II$  entonces  $P_2$  es estable y  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ . En contraste, si  $(a, b)$  pertenece a  $l \cap (III - \partial III)$  entonces  $P_2$  es inestable.

Si  $(a,b) \in I \cap \partial III$  entonces los valores propios asociados a  $P_2$  tiene norma  $|\lambda_1|=1$  y  $|\lambda_2|=|b|$ . Cuando  $(a,b) \in I \cap \partial I$  el mapa  $H$  tiene un único punto fijo  $-\left(\frac{b+1}{2}\right)(1,1)$  que tiene valores propios

asociados 1 y  $|b|$ .

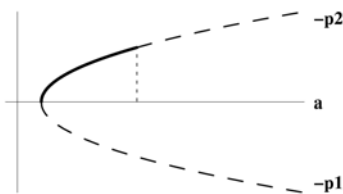


Figura 2. Estabilidad de los puntos fijos  $P_1$  y  $P_2$  del mapa  $H$ .

La figura 2 es una representación gráfica de lo anterior, donde la línea gruesa y las líneas punteadas representan la estabilidad e inestabilidad de los puntos fijos respectivamente. Adicionalmente, los puntos fijos que tienen valores propios asociados 1 y  $|b|$  son llamados puntos de bifurcación, es decir, son puntos en los cuales hay un cambio de estabilidad.

Con base en la Hipótesis A y el estudio hecho hasta ahora de los puntos fijos de (6) se examinara sólo el punto fijo  $P_2 = -(p_2, p_2)$ . Por conveniencia se trabajara con  $b$  y  $p_2 \equiv p$  como parámetros. Al seguir la notación de la Sección 3.1 se escribirá

$$r = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}, \quad l = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\},$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2$  están dados en (7) y son los valores propios del punto fijo  $P_2$ . Se dará una descripción analítica de un conjunto  $\mathfrak{R}$  de parámetros  $p, b$  que satisfaga

$$\frac{r^2}{l} < 1, \quad 0 < b, \quad (8)$$

se considera  $b > 0$  para garantizar la existencia de la matriz  $B$  tal que  $\exp(A) = B$ . Primero observe que  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{b}$  siempre que  $p^2 - b \leq 0$ . Entonces el conjunto representado por

$$R_1 = \{(p, b) : (p) \leq \sqrt{b}, \quad 0 < b < 1\}$$

es un subconjunto de  $\mathfrak{R}$ .

Se designa por  $R_2$  el conjunto complementario de  $R_1$  que cumple (8) y las inecuaciones  $b > 0, p^2 - b > 0$ .

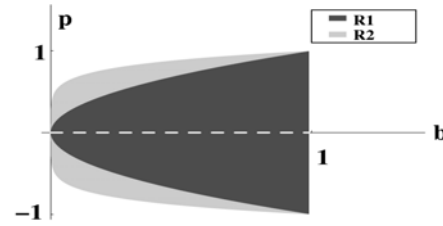


Figura 3. Grafica de la región  $\mathfrak{R} = R_1 \cup R_2$ .

Para dar una descripción analítica de  $R_2$ , en primer lugar observe, que si  $p^2 - b > 0, p > 0$  entonces  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  y en segundo lugar,  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$  siempre que  $p^2 - b > 0, p < 0$ . Después de hacer algunos cálculos, en Mathematica®, se tiene

$$R_2 = \left\{ (p, b) : b^{1/2} < (p) \leq \frac{1}{2}(b^{1/3} + b^{2/3}), 0 < b < 1 \right\}.$$

En la figura 3 se muestra la gráfica, no a escala, de  $\mathfrak{R} = R_1 \cup R_2$ .

#### 4.2 LA MATRIZ LOGARITMO

Ahora se investigara cuando el logaritmo de una matriz es real debido a que en este trabajo es importante que el campo vectorial  $f$  definido en el Lema 4 sea real. En general, calcular la exponencial de una matriz  $B$   $n \times n$  directamente a partir de la definición de la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} B^k / k!$  es dispendioso. Se uso el método de Putzer [7] para calcular la exponencial de matrices  $2 \times 2$  y la

relación  $\alpha_1 = e^{\mu_1}, \alpha_2 = e^{\mu_2}$  que hay entre los valores propios  $\alpha_1, \alpha_2$  de  $B$  y los valores propios  $\mu_1, \mu_2$  de  $A$ , se llega a tres casos para los cuales  $B = \log A$  tiene entradas reales:

Cuando  $A$  tiene sólo un valor propio  $\mu > 0$ . El logaritmo de  $A$  es

$$\log A = \frac{\mu(\log \mu - 1)I_2 + A}{\mu}.$$

Observe además que si  $A = \mu I_2$  con  $\mu < 0$ , entonces

$$\log A = \begin{pmatrix} \log(|\mu|) & -2\pi \\ 2\pi & \log(|\mu|) \end{pmatrix}$$

Cuando los valores propios  $\mu_1 \leq \mu_2$  de  $A$  son reales positivos, la matriz logaritmo es

$$\log = \frac{\log \mu_1 - \log \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (A - \mu_1 I_2) + \log \mu_1 I_2.$$

Cuando los valores propios  $\mu_1, \mu_2$  de  $A$  no son reales, se tiene

$$\log(A) = \frac{\theta A + (r^2 \operatorname{sen}\theta - r \theta \operatorname{cos}\theta) I_2}{r \operatorname{sen}\theta},$$

donde  $r = |\mu_1|$ ,  $\theta = \arg(\mu_1)$ .

### 4.3 IMPLEMENTACION NUMERICA

En general no existen fórmulas explícitas para el campo  $f$ , por eso se necesitan algoritmos confiables que ayuden a estimar  $f$  con cierta precisión. El algoritmo y la implementación se pondrán a prueba en el mapa de Hénon (6). Para hacer la implementación de  $f_n$  se eligió el paquete Mathematica® porque está diseñado con una gran variedad de rutinas que permiten al usuario programar con relativa facilidad. Además, Mathematica® es un paquete de fácil acceso debido a que es muy conocido y difundido en la comunidad científica, para detalles en las rutinas ver [4].

Si se toman  $b = 3/4$ ,  $p = 1/10$ . La matriz  $DH$  tiene valores

$$\text{propio } \lambda_1 = \frac{1}{10}(1 - \sqrt{74}i), \lambda_2 = \frac{1}{10}(1 + \sqrt{74}i).$$

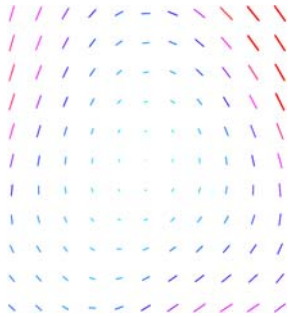


Figura 4. Gráfica del campo vectorial  $f$  para  $p=1/10$ ,  $b=3/4$ .

Ahora, si tomamos  $b = 1/64$ ,  $p = 1/8$ . La matriz

$DH$  tiene valores propios  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/8$ .

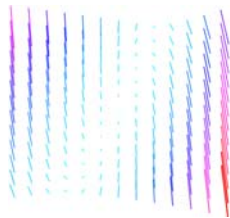


Figura 5. Gráfica del campo vectorial  $f$  para  $b=1/64$ ,  $p=1/8$ .

### 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Vale la pena destacar que la existencia de un algoritmo, como el que presentamos en la sección 3, no implica en modo alguno que éste constituya un mecanismo eficiente

y estable para propósitos de cálculo. Ahora bien, los anteriores experimentos indican que las implementaciones que presentamos van de la mano con los aspectos teóricos tratados en los capítulos anteriores. Es decir, la sucesión  $f_n$  no sólo converge bajo las condiciones del Teorema 5, sino que de manera natural, es un procedimiento constructivo para aproximar el campo  $f$ .

### 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Arango, A. Gómez. "Flows and diffeomorphisms". Revista Colombiana de Matemáticas. Vol 32, n. 1, 1998, pg 13-27.
- [2] J. Arango, A. Gómez. "Diffeomorphisms as time one map". Aequationes Mathematicae. Suiza, v.64, p.304 - 314, 2002.
- [3] A.E. Coddington and N. Levinson. "Theory of ordinary differential equations". New York: Mac Graw-Hill, 1955.
- [4] A. Gutiérrez. "El mapa de henon como función de tiempo unitario de un campo vectorial". Trabajo de grado, Universidad del Valle, 2000.
- [5] P F. Lam. "Embedding a differentiable homeomorphism in a flow subject to irregularity conditions on the derivative of the positive transition homeomorphisms". Journal of Differential Equations. Vol 30, 1978, pg 31-40.
- [6] H. Maoan. "Conditions for a diffeomorphism to be embedded in a  $C^r$  flow". Acta Math. Sinica, (N.S). Vol 4, n.2, 1988, pg 11-123.
- [7] E. J. Putzer. "Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients". Amer. Math. Monthly. Vol 73, 1966, pg 2-7.
- [8] M.C. Zdun. "On embedding of homeomorphisms of the circle in a continuous flow". Lectures Notes in Math. Editorial: Springer-Verlag, n. 1163, 1985, pg 218-231.