PUNTOS DE BIFURCACIÓN ZIP EN MODELOS DEPREDADOR PRESA DEGENERADOS

Points of bifurcation Zip in degenerated predators prey models

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Profesor Asistente, Magíster en Matemáticas
Ingeniero Civil
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ GRANADA
Profesor Asistente, Ph.D
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

RESUMEN
En el presente artículo de investigación se demuestra que los modelos degenerados del tipo dos predadores compitiendo por una presa que se regenera los cuales son modelados por un sistema tridimensional no lineal de ecuaciones diferenciales y que satisfacen las condiciones planteadas por Butter-Farkas: los puntos de bifurcación que definen la existencia de la bifurcación Zip coinciden aún en el caso en que la respuesta funcional de los predadores son diferentes.

PALABRAS CLAVES: Respuesta funcional, modelo natural, modelo artificial, modelo degenerado

ABSTRACT
In the present investigation article one demonstrates that the degenerated models of the type two predators competing by a prey that regenerates which are modeled by nonlinear a three-dimensional system of equations differentials and that they satisfy the conditions raised by Butter-Farkas: the points that define the existence of the Zip bifurcation they still agree in the case in that the functional answer of the predators are different.
.
.

KEYWORDS: *Functional response, natural model, artificial model, degenerated.*

.

1. Introducción

Para el caso de dos especies predadoras compitiendo por una presa que se regenera, el siguiente modelo ha sido considerado por varios autores [1-4]

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma s g(s,k) - x_1 p(s,a_1) - x_2 p(s,a_2), \\ \dot{x}_1 &= x_1 p(s,a_1) - p(\lambda,a_1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2 p(s,a_2) - p(\lambda,a_2)x_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

$$p(s,a) = \frac{s}{a+s}; g(s,k) = 1 - \frac{s}{k},$$

donde $s(t)$ representa la población de especie de la presa y $x_1(t)$; $x_2(t)$ describen las poblaciones de las especies predadoras que compiten por la presa; $p(s,a_i); i = 1,2$; representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional i; y $g(s,k)$ es la resistencia ambiental logística del medio al crecimiento de la presa. Las constantes γ; $d_i > 0$, son la tasa de crecimiento maximal de la presa y la tasa de muerte de la especie predadora i; respectivamente, y $a_i > 0$; representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del predador i. En este modelo las constantes d_i

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

representan la tasa natural de muerte de cada predador

$$d_i = p(\lambda, a_i),\ i = 1, 2, \tag{1.2}$$

y λ, es un parámetro umbral que se introducen teniendo el siguiente significado: x_i se incrementa si y solo si $s > \lambda$; según sea x_i positivo, llegando a ser cero en $s = \lambda$. En [7] se introduce un tipo de clasificación de la respuesta funcional en modelos del tipo (1) como modelos naturales, artificiales y degenerados teniendo en cuenta la dominancia de las especies predadoras en la dinámica del sistema. Farkas [1985] ha demostrado la existencia de dos puntos de bifurcación en el sistema (1) y ha introducido el concepto de bifurcación Zip para el caso de los modelos llamados naturales y artificiales para denotar el siguiente fenómeno "A valores de la capacidad de carga $k \le k_2$ del ecosistema con respecto a la presa, una línea de equilibrio es un atractor del sistema, ella representa coexistencia estable de las tres especies. Si k es incrementado $k_1 \le k \le k_2$ los equilibrios son continuamente desestabilizados, empezando por aquellos, que representan la dominancia del k-estratega sobre el r-estratega. Arriba de cierto valor $k_2 \le k$, el sistema no tiene más equilibrios estables que representen coexistencia; sin embargo, un ciclo límite permanece representando la oscilación de coexistencia del r-estratega y la presa". En el caso de modelos degenerados con $a = a_1 = a_2$ Farkas [4] utilizando la expresión analítica de las variedades bidimensionales invariantes del sistema que atraviesan transversalmente el segmento de equibrios L_k ha mostrado la existencia de un punto de bifurcación k_0 el cual es suficiente para describir la dinámica de la bifurcación Zip. Sin embargo en el caso de modelos degenerados con $a_1 \ne a_2$ no es posible obtener la expresión que da la forma de las variedades bidimensionales del sistema, por lo cual el problema de si también en estos sistemas existe un único punto de bifurcación que describe la dinámica del sistema permanece abierta. Posteriormente Escobar [5] ha mostrado que los puntos de bifurcación k_1, k_2 en modelos naturales y artificiales pueden ser obtenidos a partir de considerar modelos degenerados con $a = a_1$ y $a = a_2$ respectivamente. En el presente artículo de investigación se responden estos interrogantes y mostramos que en verdad los puntos de bifurcación Zip k_1, k_2 coinciden en el caso de modelos degenerados con $a_1 \ne a_2$ teniendo en cuenta el resultado anterior y las propiedades analíticas de las funciones que determinan los valores propios de la linealizacion del sistema a lo largo del segmento de equilibrio L_k.

2. Puntos de bifurcación Zip

En Escobar [5] se demostró que los puntos de bifurcación Zip k_1, k_2 satisfacen la ecuación siguiente

$$\lambda p(\lambda, a_i) g(s, k_i) + g(\lambda, k_i)(\partial_S p(\lambda, a_i) - p(\lambda, a_i)) = 0, \tag{2.1}$$

Si se considera la función

$$c(k,a) = \lambda p(\lambda,a) g(\lambda,k_i) + g(\lambda,k_i)(\partial_S p(\lambda,a) - p(\lambda,a)), \quad (2.2)$$

se tiene

$$\partial_k c(k,a) = \lambda p(\lambda,a)\partial_{sk} g(s,k) + g_k(\lambda,k)(\lambda\partial_s p(\lambda,a) - p(\lambda,a)).$$

Dado que $p(s,a)$ y $g(s,k)$ satisfacen las propiedades de Butler-Farkas siguientes:

La función $g(s,k)$ satisface las condiciones:

$$g \in C^2((0,\infty)\times(0,\infty),R), g \in C^0([0,\infty)\times(0,\infty),R),$$

$$g(0,k) = 1 \quad \partial_s g(s,k) < 0, \partial_s g(s,k), \partial_{sk} g(s,k), \geq 0, k > 0, \quad (1.4)$$

$$\lim_{x\to\infty} \gamma g(s,k) = \gamma, \quad s \geq 0. \quad (2.3)$$

La función $p(s,a)$ satisface las condiciones:

$$p \in C^1((0,\infty)\times(0,\infty),R), p \in C^0([0,\infty)\times(0,\infty),R),$$

$$p(0,a_i) = 0, \ p(s,a_i) > 0, \ s > 0, a_i > 0, \quad (2.4)$$

$$p_s(s,a) < \frac{p(s,a)}{s}, \quad s > 0, a > 0 \quad (2.5)$$

$$p_a(s,a) < 0, \quad s > 0, a > 0. \quad (2.6)$$

Luego se tiene que

$$\partial_k c(k,a) > 0, \ a > 0, k > 0, \quad (2.7)$$

Definición 2.8 Se dice que el modelo (1.1) bajo las condiciones de Butler-Farkas [6,7] es natural, artificial, o degenerado respectivamente si:

$$T\,\mathrm{m}(s,a_1,a_2) = \partial_s\left(\frac{p(s,a_2)}{p(s,a_1)}\right)\begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

Proposición 2.10: Sea k_1 , k_2 los puntos de bifurcación Zip del sistema (1.1) si el sistema (1.1) es degenerado y $a_1 \neq a_2$ entonces $k_1 = k_2$.

Prueba: Como el sistema (1.1) es degenerado por la definición (2.8) se satisface la igualdad siguiente

$$p(\lambda,a_2)\partial_s p((\lambda,a_1) = p(\lambda,a_1)\partial_s p((\lambda,a_2). \quad (2.11)$$

De (2.1) y (2.2) se tiene

$$c(k_2,a_2) = \lambda p(\lambda,a_2) g(\lambda,k_2) + g(\lambda,k_2)(\partial_S p(\lambda,a_2) - p(\lambda,a_2)) = 0. \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.12) se obtiene

$$c(k_2,a_2) = \lambda p(\lambda,a_1) g(\lambda,k_1) + g(\lambda,k_1)(\partial_S p(\lambda,a_1) - p(\lambda,a_1)) = 0$$

$$c(k_2,a_2) = c(k_2,a_1) = 0, \quad (2.13)$$

Teniendo en cuenta (2.2) y (2.13) se tiene

$$c(k_1,a_1) = c(k_2,a_1) = 0 \quad (2.14)$$

Luego de (2.7) y (2.14) se concluye por ser $c(k,a_1)$ inyectiva. □

3. CONCLUSIÓN GENERAL

Se ha demostrado en forma analítica que los puntos de bifurcación Zip que definen la dinámica en modelos depredador presa degenerados satisfaciendo las condiciones de Buttler-Farkas coinciden aún en el caso en que los parámetros de escala del modelo son distintos $a_1 \neq a_2$.

4. AGRADECIMIENTOS: Agradecimiento al Profesor Miklós Farkas por su amable y acertada orientación en esta investigación

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] KOCH A. Coexistence resulting from an alteration of dendity dependent and density independent growth. J. theoret. Biol. 44: 373-386. 1974a.

[2] SMITH, H. L. The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two predator-one prey competition model, SIAM J. appl. Math. 42: 27-43. 1982.

[3] WILKEN D. R. Some remarks on a competing predators problem, SIAM J. appl. Math. 42: 895-902. 1982.

[4] FARKAS, M. "Zip bifurcation in a competition model, Nonlinear analysis". TMA 1984, vol 8. p. 1295-1309.

[5] C. ESCOBAR, Modelo original de tipo exponencial algebraico que exhibe la bifurcación zip. Tesis Mg. Universidad de Antioquia, 2003.

[6] BUTLER, G. J. Competitive predator-prey systems and coexistence, in population Biology Proceedings, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics. 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[7] FARKAS, M. A zip bifurcation arising in population dynamics, in 10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscilations, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.