

## REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLIARMÓNICAS

### The representation of polyharmonic functions

#### RESUMEN

En este artículo consideramos el problema de la representación de funciones poliarmónicas mediante términos de expansiones holomorfas.

**PALABRAS CLAVES:** Expansión holomorfa, función poliarmónica, operador lineal.

#### ABSTRACT

*In this article we consider the problem of the representation of polyharmonic functions by holomorphic expansions.*

**KEYWORDS:** *Holomorphic expansions, lineal operator, polyharmonic functions.*

**CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS**

Ingeniero Civil, M. Sc  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ccescobar@utp.edu.co

**ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO**

Matemático, Ph.D  
Profesor Titular  
Universidad Tecnológica de Pereira  
possoa@utp.edu.co

**JOSÉ RODRIGO GONZALEZ GRANADA**

Matemático, Ph. D  
Profesor Asistente  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jorodry@utp.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Las series  $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \bar{z}^{\alpha} h_{\alpha}(z)$  fueron aplicadas en [1-3,5] para

hallar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. En el presente artículo se muestra que la parte real de toda función poliarmónica  $h(z, \bar{z})$  de orden  $n$  en un dominio  $D$  simplemente conexo se representa en la forma

$$\operatorname{Re} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j h_j(z).$$

## 2. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES POLIARMÓNICAS

A continuación se presentan dos proposiciones que caracterizan la representación de las funciones poliarmónicas de orden  $n$ , es decir funciones que son soluciones de la ecuación

$$\Delta^n \phi(z, \bar{z}) = 0.$$

*Proposición 1.* Sea  $h$  una función holomorfa en un dominio simplemente conexo  $D$ . Entonces la parte real e imaginaria de la función  $\bar{z}^n h(z)$  son funciones poliarmónicas de orden  $n+1$ , con  $n$  un entero no negativo.

Considerando el operador  $\Delta^{n+1}$  en forma compleja

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(\bar{z}^n h(z)) &= 4^{n+1} d\bar{z}^{n+1} dz^{n+1}(\bar{z}^n h(z)) \\ &= 4^{n+1} d\bar{z}^{n+1} \bar{z}^n dz^{n+1}(h(z)). \end{aligned} \quad (1)$$

Como  $h(z)$  es holomorfa tiene derivada de cualquier orden. Sea  $g(z)$  la función holomorfa definida por

$$g(z) = dz^{n+1}(h(z)). \quad (2)$$

De (2) y (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(\bar{z}^n h(z)) &= 4^{n+1} d\bar{z}^{n+1} \bar{z}^n (g(z)) \\ &= 4^{n+1} g(z) d\bar{z}^{n+1} \bar{z}^n = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Sea  $\bar{z}^n h(z) = u + iv$ .

Entonces

$$\Delta^{n+1}(\bar{z}^n h(z)) = \Delta^{n+1}u + i\Delta^{n+1}v,$$

por ser  $\Delta$  un operador lineal. Además se tiene que

$$\Delta^{n+1}u = \operatorname{Re} \Delta^{n+1}(\bar{z}^n h(z)) = \Delta^{n+1} \operatorname{Re}(\bar{z}^n h(z)),$$

$$\Delta^{n+1}v = \operatorname{Im}(\Delta^{n+1}(\bar{z}^n h(z))) = \Delta^{n+1} \operatorname{Im}(\bar{z}^n h(z)).$$

Teniendo en cuenta (3) y las expresiones anteriores se obtiene

$$\Delta^{n+1} \operatorname{Re}(\bar{z}^n h(z)) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta^{n+1} \operatorname{Im}(\bar{z}^n h(z)) = 0.$$

*Proposición 2.* La parte real de toda función poliarmónica  $h(z, \bar{z})$  de orden  $n$ , se puede expresar de la forma

$$\operatorname{Re} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j h_j(z),$$

donde las funciones  $h_j(z)$  son holomorfas en dominio simplemente conexo  $D$ .

La demostración de la proposición 2 se obtiene por inducción sobre el orden de  $h$ .

Para  $n = 0$ ,  $h$  es armónica. Por la proposición 1,  $\text{Re } h = u(x, y)$  es armónica en  $D$  y posee su armónica conjugada  $v(x, y)$  (ver [4], teorema VI.33). Existen varios métodos para hallar  $h = h_0$  a partir de  $u(x, y)$ .

Hallamos  $h_0$  a partir de  $u(x, y)$  utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$v_x(z) = -u_y(z),$$

$$v_y(z) = u_x(z),$$

$$v(z) = \int_{x_0}^x -u_y(z)dx + \varphi(y), \tag{4}$$

$$v_y(z) = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x u_y(z)dx + \varphi'(y) = u_x(z). \tag{5}$$

Dado que  $u$  es armónica y  $u_{yy}$  es continua se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x u_y(z)dx &= \int_{x_0}^x -u_{yy} dx \\ &= \int_{x_0}^x u_{xx} dx = u_x(x, y) - u_x(x_0, y). \end{aligned} \tag{6}$$

De (5) y (6) se tiene

$$\varphi'(y) = u_x(x_0, y).$$

Integrando esta última expresión y sustituyendo en (4), tenemos

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^x u_y(x, y)dx + \int_{y_0}^y u_x(x_0, y)dy + v(x_0, y_0).$$

Recíprocamente, la función  $v$  así construida satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

Se puede demostrar que  $h_0(z)$  asociada  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  se expresa de la siguiente manera  $h_0(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$ .

Bajo la hipótesis de que  $u$  sea armónica, usando la teoría de series de potencia se demuestra que

$$h_0(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0), \tag{7}$$

en un entorno suficientemente pequeño del origen.

Con el fin de deducir (7) para el caso particular en que  $h_0$  sea racional con  $h_0(0)$  real, definimos la función racional

$$h_1 \text{ dada por } h_1(z) = \overline{h_0(z)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} 2u(x, y) &= h_0(z) + \overline{h_0(z)} = h_0(z) + h_1(\bar{z}) \\ &= h(x + iy) + h_1(x - iy). \end{aligned}$$

Puesto que la igualdad anterior se cumple para el caso de  $x$  e  $y$  complejas, se tiene que

$$2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = h_0(z) + h_1(0).$$

Como  $h_0(0)$  es real,  $h_1(0) = h_0(0) = u(0, 0)$  de donde se obtiene (7).

A continuación realizamos el paso de inducción.

Sea  $\text{Re } h$  una función poliarmónica de orden  $n$ . Entonces

$$\Delta^n \text{Re } h(z, \bar{z}) = 0.$$

$$\text{Luego } \Delta^{n-1}(\Delta \text{Re } h(z, \bar{z})) = 0,$$

esto es  $\Delta \text{Re } h(z, \bar{z})$  es poliarmónica de orden  $n-1$ .

Por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\Delta \text{Re } h(z, \bar{z}) = \text{Re} \sum_{j=0}^{n-2} \bar{z}^j h_j(z),$$

donde  $h_j$  es holomorfa para  $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$ .

Usando  $\Delta$  en forma compleja

$$4d\bar{z}dz(\text{Re } h(z, \bar{z})) = \text{Re} \sum_{j=0}^{n-2} \bar{z}^j h_j(z).$$

Luego

$$\begin{aligned} 4dz(\text{Re } h(z, \bar{z})) &= \text{Re} \int \sum_{j=0}^{n-2} \bar{z}^j h_j(z) d\bar{z} + \text{Re } g_1(z) \\ &= \text{Re} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\bar{z}^{j+1}}{j+1} h_j(z) + \text{Re } g_1(z) \\ &= \text{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\bar{z}^j}{j} h_{j-1}(z) + \text{Re } g_1(z). \end{aligned}$$

$$4 \text{Re } h(z, \bar{z}) = \text{Re} \int \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\bar{z}^j}{j} h_{j-1}(z) + g_1(z) \right] dz + \text{Re } g_2(\bar{z})$$

$$= \text{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \bar{z}^j \frac{1}{j} \int h_{j-1}(z) dz + \text{Re} \bar{z}^0 \int g_1(z) dz + \text{Re } g_2(\bar{z})$$

$$= \text{Re} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j \tilde{h}_j(z) + \text{Re } g_2(\bar{z}),$$

$$\text{donde } \tilde{h}_j(z) = \frac{1}{j} \int h_{j-1}(z) dz \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{y } \tilde{h}_0(z) = \int g_1(z) dz.$$

Como  $g_2(\bar{z})$  es armónica entonces es poliarmónica de cualquier orden y considerándola poliarmónica de orden  $n-1$  se puede expresar de la siguiente manera

$$g_2(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{n-2} \bar{z}^j \tilde{\tilde{h}}_j(z),$$

con  $\tilde{h}_j(z)$  holomorfa para  $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$ .

Luego

$$g_2(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j \tilde{h}_j(z) + \sum_{j=0}^{n-2} \bar{z}^j \tilde{h}_j(z).$$

Por tanto,  $h(z, \bar{z}) = \text{Re} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j h_j^*(z)$ ,

donde  $h_j^* = \frac{1}{4}(\tilde{h}_j + \tilde{h}_j)$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$  y

$h_{n-1}^* = \frac{1}{4}\tilde{h}_{n-1}$ . Queda así demostrada la proposición 2.

### 3. EJEMPLO DE REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLIARMÓNICA

A partir de la función poliarmónica  $u = ax^3 + bx^2 + cy$  construimos la función  $h(z, \bar{z})$  tal que  $\text{Re} h(z, \bar{z}) = u$  y damos la expansión holomorfa de  $h$ .

$$\Delta \text{Re} h = 6ax + 2b,$$

$$\Delta^2 \text{Re} h = \Delta(\Delta u) = 0.$$

Como  $\Delta \text{Re} h$  es armónica,

$\Delta \text{Re} h(x, y) = 6ax + 2b = U(x, y)$ ; aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$V_x = -U_y = 0,$$

$$V = \varphi(y), \text{ por lo tanto}$$

$$\varphi'(y) = 6a,$$

$$V(x, y) = \varphi(y) = 6ay + k,$$

Con  $k$  constante.

Así que

$$h_0(z) = U(z, 0) + iV(z, 0) = 6az + 2b + ic,$$

Además,

$$dzd\bar{z} \text{Re} h(z, \bar{z}) = \text{Re} \frac{1}{4}(6az + 2b) + \text{Re} ic,$$

$$dz \text{Re} h(z, \bar{z}) = \text{Re} \frac{1}{4} \bar{z}(6az + 2b) + \text{Re} ic\bar{z} + \text{Re} g_1(z),$$

Así,

$$\text{Re} h(z, \bar{z}) = \text{Re} \left[ \bar{z} \int \frac{1}{4}(6az + 2b) dz + cz\bar{z}i \right.$$

$$\left. + \int g_1(z) dz + g_2(\bar{z}) \right],$$

$$\tilde{U}(x, y) = \text{Re} \left[ cz\bar{z}i + \int g_1(z) dz + g_2(\bar{z}) \right] = \text{Re} h(z, \bar{z})$$

$$- \text{Re} \left[ \bar{z} \int \frac{1}{4}(6az + 2b) dz \right].$$

Luego

$$\tilde{U}(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy - \left( b \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} ax^3 + \frac{b}{2} y^2 + \frac{3}{4} axy^2 \right),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \left[ cz\bar{z}i + \int g_1(z) dz + g_2(\bar{z}) \right] &= 2\tilde{U} \left( \frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right) \\ &= -czi + \frac{b}{2} z^2 + \frac{a}{4} z^3. \end{aligned}$$

Así,

$$h(z, \bar{z}) = \bar{z} \left( \frac{3}{4} az^2 + \frac{b}{2} z \right) - czi + \frac{b}{2} z^2 + \frac{a}{4} z^3.$$

Tomando la parte real se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Re}[h(z, \bar{z})] &= \text{Re} \left[ \bar{z} \left( \frac{3}{4} az^2 + \frac{b}{2} z \right) - czi + \frac{b}{2} z^2 + \frac{a}{4} z^3 \right] = \\ &= \text{Re} \left[ \bar{z} h_1^* + h_0^* \right] \\ &= ax^3 + bx^2 + cy. \end{aligned}$$

### 4. CONCLUSIONES

En el campo de la aplicación de la teoría hidrodinámica y elasticidad es conocida la eficacia de las funciones armónicas en la representaciones del flujo de un campo de velocidades estacionario y de las funciones biarmónicas en la representación de un campo de tensiones de un sólido sometido a cargas y restricciones solo por mencionar dos ejemplos. Por ello resulta apenas lógico la importancia de generalizar las propiedades de las funciones armónicas y biarmónicas en el contexto de las expansiones holomorfas como es mostrado en [2-4]. Los teoremas presentados en este artículo muestran que esta generalización es posible a partir de una utilización de las propiedades de las funciones armónicas.

### 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.I Alexandrovich, Application of two complex variables to the theory of elasticity, Dokl.-Akad.-Nauk 232 (3) (1977), 542-544.
- [2] C. Escobar, A. Posso, J. R.González, Método de las expansiones holomorfas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales de coeficientes constantes, Scientia et Technica, Año XIII Número 35 Agosto de 2007.
- [3] K. Rectorys, V. Zahradnik, Solution of the first biharmonic problem by the method of least squares on the boundary, Aplikace Matematiky, 19(2) (1974), 101-131.
- [4] B. P. Palka, An introduction to complex function theory, Springer, 1990.
- [5] A. Rodionov, Explicit Solutions for linear partial differential equations, J.-Math, Vol 2, No 2. December (2000), 34-42.