LA SERIE GEOMETRICA Y SU DERIVADA

The Geometric series and it derivative

CAMPO ELIAS GONZALEZ PINEDA
Mg. Matemáticas,
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
cegp@utp.edu.co

SANDRA MILENA GARCIA
Lic Matemáticas y Física,
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
tazyotas@utp.edu.co

LUIS EDUARDO OSORIO ACEVEDO
M.Sc. Enseñanza de las Matemáticas,
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
leosorio@utp.edu.co

RESUMEN

En este artículo hallaremos el valor al cual converge la derivada *k*-esima de la serie geométrica, $\sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n$, pero sin usar herramientas del cálculo diferencial. Ilustramos con dos técnicas como llegar al resultado. Este artículos resalta la

Importancia de demostrar teoremas con teorías avanzadas con herramientas más simples. La fórmula que presentamos aquí, prácticamente es más fácil de obtener y más concreta que si se aplicara el resultado utilizando herramientas del calculo de series de potencias.

PALABRAS CLAVES: Converge, derivada *k*-esima de la serie geométrica.

ABSTRACT

In this article we find the value at which the geometric series k-th derivative $\sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n$ *converges, but without tools of differential calculus. Two technics illustrate how to get the result.*

KEYWORDS: *Converges, geometric series k-th derivative.*

1. INTRODUCCION

En el curso de Cálculo Integral en determinado momento se toca el tema de la serie geométrica, y se muestra para que valores esta serie converge. También se aclará que hallar a que valor una serie converge no es fácil, por lo cual resulta útil utilizar la serie geometrica para compararla con otras series. En este artículo se mostrará como hallar el valor al cual converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n$ de una manera relativamente fácil. Es imprtante resaltar que la tecnica utilizada en simple y solo requiere la utilización de herramientas de series sin utilizar la derivada de las mismas.

2. ALGUNOS RESULTADOS CONOCIDOS

En el articulo [2], hacen una introducción historica y realizan el cálculo de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$, $p = 0,1,2,3,4$. Además de esto de una manera didactica muestran una interpretación geométrica de este resultado. Para probar el resultado principal de este artículo se utilizará una técnica similar a la utilizada en [2], pero pretendemos encontrar una formula general para $\sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n$.

Además es conocido que el valor de la serie geométrica es $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, $|r|<1$, y para los demás valores de r la serie diverge, por lo cual en lo que sigue del artículo asumiremos que $|r|<1$.

Comenzamos ahora un ejemplo ilustrativo. Este nos dará la pauta que seguieremos en el trancurso de este artículo. Nótese la simplicidad que resulta para hecer el cálculo deseado.

Ejemplo 1. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

Para ellos consideramos la siguiente tabla:

$1/2$			
$1/2^2$	$1/2^2$		
$1/2^3$	$1/2^3$	$1/2^3$	
$1/2^4$	$1/2^4$	$1/2^4$	$1/2^4$

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2011
Fecha de Aceptación: 26 de Abril de 2011

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sumando por cada columna obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\cdots+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

Pero sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2-1=1,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}=1/2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

Por lo que $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=2$.

3. Tecnica para el cálculo de $\sum_{n=1}^{\infty}n^k r^n$.

Ejemplo 2. Calcular $\sum_{n=1} nr^n, \quad |r|<1.$

Nos piden calcular la suma

$$\sum_{n=1} nr^n=r+2r^2+3r^3+\cdots$$

Consideremos la tabla siguiente:

r			
r^2	r^2		
r^3	r^3	r^3	
r^4	r^4	r^4	r^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sumando por columnas

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=2}^{\infty}r^n+\cdots+\sum_{n=k}^{\infty}r^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$$

Pero sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}-1=\frac{r}{1-r}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}r^n=\frac{r}{1-r}-r=\frac{r^2}{1-r}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}r^n=\frac{r^k}{1-r}$$

Por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}r^n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{1-r}=\frac{r}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}=\frac{r}{(1-r)^2}$$

Ejemplo 3. Calculemos la suma $\sum_{n=1}^{\infty}n^2r^n$ por el mismo procedimiento. Así de la tabla:

r			
r^2	r^2	r^2	r^2 (cuatro veces) $\cdots$
r^3	r^3	r^3	r^3 (nueve veces) $\cdots$
r^4	r^4	r^4	r^4 (dieciséis veces) $\cdots$
r^k	r^k	r^k	r^k (k^2 veces) $\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n+3\sum_{n=2}^{\infty}r^n+5\sum_{n=3}^{\infty}r^n+\cdots$$

$$+(2k-1)\sum_{n=k}^{\infty}r^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n^2r^n$$

Pero

$$(2k-1)\sum_{n=k}^{\infty}r^n=(2k-1)\frac{r^k}{1-r}=\frac{1}{1-r}(2kr^k-r^k)$$

Así que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((2k-1)\sum_{n=k}^{\infty}r^n\right)=\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}(2kr^k-r^k)$$

$$=\frac{2}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}kr^k-\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}r^k$$

$$=\frac{2}{1-r}\frac{r}{(1-r)^2}-\frac{1}{1-r}\frac{r}{1-r}$$

$$=\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$$

Ejemplo 4. Calculemos $\sum_{n=1}^{\infty}n^3r^n$. Consideremos una vez más la tabla siguiente. y veamos que concluciones podemos sacar de ella:

r
r^2 (ocho veces) $\cdots$
r^3 (veintisiete veces) $\cdots$
r^4 (sesenta y cuatro veces) $\cdots$
r^{k-1} ($(k-1)^3$ veces) $\cdots$
r^k (k^3 veces) $\cdots$
$\vdots$

Sumando tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n + 7\sum_{n=2}^{\infty} r^n + 19\sum_{n=3}^{\infty} r^n + \cdots$$

$$+ (k^3 - (k-1)^3)\sum_{n=k}^{\infty} r^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k^3 - (k-1)^3)\sum_{n=k}^{\infty} r^n \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[(3k^2 - 3k + 1)\frac{r^k}{1-r} \right]$$

$$= \frac{1}{1-r}\left[\frac{3r(r+1)}{(1-r)^3} - \frac{3r}{(1-r)^2} + \frac{r}{1-r} \right]$$

$$= \frac{r}{(1-r)^4}\left[r^2 + 4r + 1 \right]$$

Ejemplo 5. Calculemos la suma $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 r^n$.

De los ejemplos anteriores tenemos;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 r^n = \frac{1}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^4 - (n-1)^4 \right] r^n$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 4n^3 r^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6n^2 r^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4n r^n - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \right)$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(\frac{4r(r^2+4r+1)}{(1-r)^4} - \frac{6r(r+1)}{(1-r)^3} + \frac{4r}{(1-r)^2} - \frac{r}{1-r} \right)$$

$$= \frac{r}{(1-r)^5}\left(r^3 + 11r^2 + 11r + 1 \right)$$

$$= \frac{r(r+1)(r^2+10r-1)}{(1-r)^5}$$

4. Segunda Tecnica para el cálculo de $\sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n$.

En la sección anterior se puede notar que las operaciones se vuelven más tediosas a medida que el crece el exponente. Pero veamos otra forma de obtener los mismos resultados anteriores de una manera más fácil. La estrategia consite en construir una tabla que nos permita sumar de manera adecuada los elementos de la serie. Recuerdese que esta series es absolutametne convergente y por tanto podemos reordenar sus terminos sin que su resultado se altere.

E**jemplo 6.** Obtener la suma $\sum_{n=1}^{\infty} n r^n$. De la tabla siguiente

r			
r^2	r^2		
r^3	r^3	r^3	
r^4	r^4	r^4	r^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=2}^{\infty} r^n + \cdots + \sum_{n=k}^{\infty} r^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+k} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+k}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

$$= \frac{r}{1-r}\frac{1}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

Ejemplo 7. Obtener la suma $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n$.

Una vez más nuestro gráfico guia será

r			
$2r^2$	$2r^2$		
$3r^3$	$3r^3$	$3r^3$	

$4r^4$	$4r^4$	$4r^4$	$4r^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sumando por columnas tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n + \sum_{n=2}^{\infty} nr^n + \cdots + \sum_{n=k}^{\infty} nr^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)r^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} r(n+2)n + 2 + \cdots$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(n+k)r^{n+k} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k)r^{n+k}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} nr^{n+k} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} kr^{n+k}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \sum_{k=0}^{\infty} r^k + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{\infty} kr^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \right)$$

$$= \frac{r}{(1-r)^2}\left(\frac{1}{1-r} + \frac{r}{1-r} \right)$$

$$= \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$$

Ejemplo 8. Obtener una formula para $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n$.

Tenemos la tabla

r			
$2^2 r^2$	$2^2 r^2$		
$3^2 r^3$	$3^2 r^3$	$3^2 r^3$	
$4^2 r^4$	$4^2 r^4$	$4^2 r^4$	$4^2 r^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sumando por columnas tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^n + \cdots + \sum_{n=k}^{\infty} n^2 r^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 r^{n+1} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty}(n+k)^2 r^{n+k} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(n+k)^2 r^{n+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 + 2nk + k^2) r^{n+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n + 2\sum_{k=0}^{\infty} kr^k \sum_{n=1}^{\infty} nr^n + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

$$= \frac{1}{1-r}\cdot\frac{r(r+1)}{(1-r)^3} + 2\frac{r}{(1-r)^2}\cdot\frac{r}{(1-r)^2} + \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}\cdot\frac{r}{1-r}$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n = \frac{r(r^2+4r+1)}{(1-r)^4}$$

Ejemplo 9. Obtengamos una formula para la suma $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+1} r^n$ donde $|r|<1$.

De manera similar a los procesos anteriores obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+1} r^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(n+k)^p r^{n+k}$$

Pero

$$(n+p)^k = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j} n^{p-j} k^j$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+1} r^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j} n^{p-j} k^j r^{n+k}$$

$$= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\sum_{k=0}^{\infty} k^j r^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-j} r^n$$

5. CONCLUSIONES

Hemos hallado una fórmula general para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n$ sin utilizar elemntos de cálculo diferencial.

Hemos generalizado el resultado de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n}$, el cual se encuentra en [2].

Se han ilustrado dos técnicas para hallar ilustrar como se puede obtener el resultado principal. Pero durante el proceso queda en evidencia que la segunda tecnica hace que el proceso sea más fácil.

La generalización de resultados es importante desde todo punto de vista. Pedagogico porque permite al lector ampliar su visión en el tema referidos y cientifico porque presenta avances que pueden a su vez dar indicios de cómo generalizar otros problemas o teoremas.

La fórmula encotrada permite calcular la suma de la derivada de la serie geometrica para cualquier valor de p y esto induce a generar un algoritmo que permita hacer calculos que pueden ser de interés además de los ya conocidos.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] *Apostol T.M*, *Calculus Vol1*, 2ª edición, Editorial Reverté S. A.

[2] Boulton L, Rosas M. *Sumando la derivada de la serie geometrica*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol X. No 1 (2003).

[3] *Edwards, Penney*, Cálculo con Geometría Analítica, Prentice may, 1996, 4ta. Ed.

[4] Thomas G.B. Calculus infinitesimal y Geometría Analítica. Aguilar Madrid 1971.

[5] Leithold ,Louis. El Calculo. Oxford University Press Harla. México.2001.

[6] Spiegel, Murray. Cálculo Superior. Mc Graw-Hill. México. 1980.

[7] Kitchen, J.W.: Calculus of One Variable. Addison Wesley P.Co. Reading, Massachusetts,1969.