# UN PROBLEMA DE TIPO ISOPERIMETRICO PARA TRIANGULOS

## Un problema isoperimetric for triangles

**CARLOS A ESCUDERO S.**
Matemático, Ph,D.
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
carlos10@utp.edu.co.

**YURI A. POVEDA**
Matemático, Ph,D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co.

**EDGAR A VALENCIA**
Matemático, Msc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co.

**RESUMEN**

En este artículo demostraremos el siguiente problema isoperimétrico. De todos los triángulos de perímetro dado el equilátero es el que tiene suma máxima de los inversos de las longitudes de los lados multiplicado por su área. Este problema constituye un modelo inicial de la teoría del cálculo variacional donde se estudian mínimos o máximos de funciones usando ecuaciones integrales y teoría clásica del análisis. Sabemos que el cálculo variacional es un área muy elegante de las matemáticas pero se necesita tener un bagaje amplio en ecuaciones diferenciales y análisis moderno, mirar por ejemplo [6], por tanto pretendemos en este artículo realizar el problemas antes dicho usando resultados muy elementales de la geometría euclidiana plana como lo hace el profesor Santaló en [5].

**PALABRAS CLAVES**: Area, isoperimetric, perímetro, triángulo

**ABSTRACT**

*In this article we will demonstrate the following problem isoperimetric. Of all the triangles of perimeter fix of the equilateral one it is the one that has maximum sum of the inverse ones of the lengths of the sides multiplied by his area. We know that the variational calculation is a very elegant area of the mathematics but it is necessary have a wide baggage in differential equations and modern analysis,see [6] therefore we try in this article to realize the problemas before above mentioned using very elementary results of the Euclidean flat geometry like it there does the teacher Santaló in [5].*

**KEYWORDS:** Area, isoperimetric, perimeter, triangle

## 1. INTRODUCCIÓN

La palabra isoperimétrico significa literalmente, con un perímetro igual. Algunos matemáticos afirman que el teorema de tipo global más antiguo de la geometría diferencial es el siguiente problema isoperimétrico: De todas las curvas cerradas, simples en el plano con igual perímetro, el círculo es el que encierra mayor área; este problema también se puede formular de la siguiente manera. Sea C una curva cerrada, simple y plana de longitud L, y sea A el área de la región encerrada por C. Entonces

$$L^2 - 4\pi \mathrm{A} \geq 0$$

y la igualdad se da si y sólo si, C es un círculo.

Bajo esta última forma, el problema era ya conocido por los griegos quienes conocían la solución, a saber, el círculo. Una demostración satisfactoria del hecho del que círculo es una solución del problema isoperimétrico tardó , no obstante ,mucho tiempo en aparecer . La principal razón parece ser que la demostraciones primeras admitían que debía existir una solución. En 1870 Weierstrass señaló que cuestiones muy similares no admitían soluciones y dio una demostración completa de la existencia de una solución del problema isoperimétrico. La demostración Weierstrass era muy difícil de entender en el sentido que era un corolario de la teoría por él creada para el tratamiento de problemas de optimización de ciertas integrales esta teoría en el mundo actual se conoce con cálculo variacional, [5] siendo el problema isoperimétrico un ejemplo de esta teoría. Posteriormente se encontraron demostraciones mas directas una de ella se puede leer en [7].

En la literatura existen muchos libros especializados en desigualdades de tipo isoperimétrico, por ejemplo el libro

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2011
Fecha de Aceptación: 28 de Abril de 2011

de la cita bibliográfica [2]. También se encuentran muchas desigualdades preciosas con un alto contenido geométrico análogas a la desigualdad isoperimétrica como son las desigualdades de Bonnessen que se expresan de la siguiente manera:

$$L^2 - 4\pi A \geq A^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^2$$
$$L^2 - 4\pi A \geq A^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^2$$

$$L^2 - 4\pi A \geq L^2 \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2$$

Donde A es el área de una región G plana encerrada por una curva simple de longitud L, R el radio de la circunferencia mayor contenida en G y r el radio de la circunferencia menor contenida en G. Podemos observar que en las desigualdades de Bonnessen el lado izquierdo es el defecto de la desigualdad isoperimétrica clásica y este defecto es no- negativo y tiende a cero cuando G es una circunferencia; por eso el comentario anterior sobre el peso geométrico de dichas desigualdades.

También de dicho problema resulta la siguiente desigualdad.

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi} \leq r \leq R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}$$

Las pruebas de estas desigualdades se puede estudiar en los artículos de Osserman [7] y [10].
Los matemáticos no satisfechos con los resultados sorprendentes que obtuvieron del problema isoperimétrico en el plano euclidiano dan un gran salto al estudiar el problema isoperimétrico en superficies completas, simplemente conexas y de curvatura constante K. En estos espacios la desigualdad isoperimétrica tiene la siguiente forma:

$$L^2 + KA^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Donde A es el área de un dominio de una región encerrada por una curva de longitud L y K es la curvatura gaussiana de la superficie completas, simplemente conexas. Como se puede notar cuando la curvatura gaussiana K es cero la desigualdad coincide con la desigualdad isoperimétrica en el plano euclidiano como esperábamos. El lector interesado en este tipo de problema en curvatura constante puede consultar la cita bibliográfica [4].

El problema isoperimétrico sea convertido entonces en una investigación de las matemáticas en el área de la geometría diferencial muy prolifera. En este artículo formularemos y demostraremos un problema de tipo isoperimétrico donde las regiones cerradas serán triangulares, el enunciado del teorema es el siguiente:

Sea T un triángulo de lados $a_1, a_2, a_3$ de perímetro $2L = a_1 + a_2 + a_3$, y sea A el área de la región cerrada por T. Entonces

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq \frac{\sqrt{3}L}{2A}$$

la igualdad se da si y sólo si, T es un triángulo equilátero.
Otra formulación de dicho problema es la siguiente: De todos los triángulos de perímetro dado el equilátero es el que tiene suma máxima de los inversos de las longitudes de los lados.

Una solución de este teorema se obtiene usando multiplicadores de Lagrange, el problema se puede expresar de la siguiente manera, maximizar la siguiente función

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\sqrt{L(L-a_1)(L-a_2)(L-a_3)}$$

sujeta a la condición $x + y + z = 2L$, encontraremos que el mínimo se obtiene cuando $x = y = z$, ver cualquier texto de cálculo de varias variables por ejemplo la citas bibliográficas [2], [7], y [10]. Como el lector se puede dar cuenta el problema es muy difícil usando técnicas del cálculo diferencial. En este artículo vamos a mostrar cómo, encarando este problema con análisis geométricos elementales puede obtenerse la solución completa sin el recurso de métodos analíticos. Entonces daremos otra prueba sin usar calculo diferencial, precisamente lo que haremos es usar fuertemente la formula de Herón y así obtener una prueba más geométrica de dicho problema.
Cabe a notar que seguiremos la técnica usada en [4] por el gran matemático Catalán Santaló.

## 2. DESIGUALDAD FUNDAMENTAL

En esta sección demostraremos una desigualdad fundamental para comprobar nuestro resultado principal.

**LEMA 2.1**

Si u, v y w son tres números positivos entonces

$$\sqrt{u}+\sqrt{v} + \sqrt{w} \leq \sqrt{3(u+v+w)} \qquad [1]$$

la igualdad se obtiene si y sólo si u = v = w.

**Demostración.** Usando la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética para dos números positivos tenemos:

$$\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}, \qquad \sqrt{vw} \leq \frac{v+w}{2}, \qquad \sqrt{uw} \leq \frac{u+w}{2}.$$

Por tanto

$$\sqrt{uv} + \sqrt{vw} + \sqrt{uw} \leq u + v + w. \qquad [2]$$

Ahora como

$$\left(\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}\right)^2 = u + v + w + 2\sqrt{uv} + 2\sqrt{uw} + 2\sqrt{vw},$$

entonces usando la desigualdad [2] tenemos

$$\left(\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}\right)^2 = 3(u + v + w),$$

extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados se obtiene la desigualdad en 1. Por la igualdad en la media aritmética y geométrica se tiene que en [1] sólo valdrá únicamente la igualdad para el caso que u = v = w, como habíamos dicho. Con lo anterior se concluye la demostración del Lema.

## 3 RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección demostraremos un problema de tipo isoperimétrico para triángulos. Cabe anotar que una herramienta fundamental para demostrar dicho teorema es la formula de Herón.

Creo que es imprescindible dicha fórmula para demostrar resultados isoperimétricos de una manera muy elemental comparada cuando se usa análisis diferencial.

**TEOREMA 3.1**

Si T es un triángulo de perímetro $2L = a_1 + a_2 + a_3$, y A el área de la región cerrada por T entonces

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq \frac{\sqrt{3}L}{2A}$$

la igualdad se da si y sólo si, T es un triángulo equilátero.

**Demostración.** La fórmula siguiente que relaciona el área y el perímetro de un triángulo

$$A = \sqrt{L(L-a_1)(L-a_2)(L-a_3)} \qquad [3]$$

es conocida como la fórmula de Herón.

Como $2A = h_i a_i,\ para\ todo\ i = 1,2,3,$ donde los $h_i$ son respectivamente las alturas del triángulo de lados $a_i$, entonces resulta que

$$a_1 = \frac{2}{h_1}\sqrt{L(L-a_1)(L-a_2)(L-a_3)}\,. \qquad [4]$$

Pero

$$4(L-a_2)(L-a_3) = (2L-2a_2)(2L-2a_3)$$
$$= \left(a_1 + (a_2 - a_3)\right)\left(a_1 -\right.$$

$a2-a3=a12-a2-a32\ \ \leq a12$

por tanto, de [4] se deduce que

$$a_1 \leq \frac{a_1}{h_1}\sqrt{L(L-a_1)}$$

entonces

$$h_1 \leq \sqrt{L(L-a_1)}\,. \qquad [5]$$

Ahora, como $2A = h_i a_i, para\ todo\ i = 1,2,3$, entonces

$$\frac{2A}{a_1} + \frac{2A}{a_2} + \frac{2A}{a_3} \leq \sqrt{L(L-a_1)} + \sqrt{L(L-a_2)} + \sqrt{L(L-a_3)},$$

usando el Lema 2.1 tenemos

$$\frac{2A}{a_1} + \frac{2A}{a_2} + \frac{2A}{a_3} \leq \sqrt{L}\sqrt{3\sum_{i=1}^{3}(L-a_i)}$$
$$= \sqrt{L}\sqrt{3L} = \sqrt{3}L.$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\leq\frac{\sqrt{3}L}{2A}$$

la igualdad se da únicamente, según se dijo en el Lema 2.1, cuando

$$(L-a_1)=(L-a_2)=(L-a_3)$$

es decir, cuando el triangulo sea equilátero. De esta manera queda demostrado nuestro resultado principal.

## 3. CONCLUSIONES

En esta pequeña nota demostramos un problema isoperimétrico usando recursos geométricos sin hacer uso de métodos diferenciables, dando de paso, resultados interesantes. También con esta técnica se pueden obtener los siguientes resultados isoperimétricos:

1. Se da el perímetro $2L=a+b+c$ de un triángulo. Encontrar los limites inferior y superior de las sumas de las alturas, concretamente se demuestra que: Entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene máxima suma de alturas.

2. Se da el perímetro $2L=a+b+c$ de un triángulo. Encontrar los limites inferior y superior de las sumas de las bisectrices, concretamente se demuestra que: Entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene máxima suma de bisectrices interiores y el caso limite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual se reduce a cero es el que tiene mínima dicha suma.

3. Se da el perímetro $2L=a+b+c$ de un triángulo. Encontrar los limites inferior y superior de las sumas de las medianas, concretamente se demuestra que: Entre todos los triángulos de perímetro dado la máxima suma de medianas corresponde al caso limite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a cero, y la mínima suma de medianas al caso limite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a $180^{\circ}$.

También en este sentido se puede obtener la desigualdad clásica isoperimétrica para los triángulos usando fuertemente la fórmula de Heron y recordando que el producto de tres factores de suma constante es máximo cuando los tres factores son iguales, concretamente se puede demostrar los siguiente:

Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, de perímetro $2L=a_1+a_2+a_3$ y área S entonces

$$\frac{\sqrt{3}}{36}(a_1+a_2+a_3)\geq S.$$

La igualdad se da si y sólo si el triángulo es equilátero. Recordemos que el área de un triángulo equilátero es $S=\frac{\sqrt{3}L^2}{9}$.

## 4. BIBLIOGRAFÍA

[1] A.DONEDDU. “Análisis y Geometría Diferencial ” Aguilar.Madrid.1979.

[2] D.Burago. “Geometry Inequality”Springer Verlang.New York.1980.

[3] Edward and Penney “Calculo con Geometría Analítica”Prentice Hall Hispanoamericana,S.A. edición 4.México.1994.

[4] L.Santaló.”Integral Geometry and Geometric Probability.”Addison-Wesley.1976.

[5] L. Santalo "Algunas desigualdades entre los elementos de un triangulos," *Revista Matematica Hispano-Americana*, vol. 4, pp. 65-73, 1950.

[6] J. Jurgen, "Postmoder Analysis," Springer Verlag.

[7] M.P Do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surface," Prentice-Hall,Inc, New Yersey1976, pp. 31-35.

[8] R.Osserman,"Isoperimetric and related inequality." Proc.Symp.Pure.Math.(Stanford.1973).Providence27,207 -215.1975.

[9] R.Osserman. "Some Remarks on the isoperimetric inequqlity and a problem of Gehring". J Analyse Math.Helv.52,545-555.1977.

[10] R.Osserman. " Isoperimetric inequality ".Bull Amer. Math. Soc.84,1182-1238.1978.

[11] R.Osserman. "Bonnessen-style isoperimetric inequality ". Amer. Math.Monthly 86,1-29.1979.

[12] S.L Salas. E. Hille, "Calculus de una y varias variables," Editorial Reverte, S.A, Barcelona, ejercicio 25, pp. 925.

[13] S. Montiel anda A. Ros "Compact hypersurface: The Alexandrov theorem for higher order mean curvature." Survey Pure. Math,52,(279-296),1991.

[14] S. Montiel anda A. Ros "Curve and Surface."Real Matematica Española.American Mathematical Society, 69,2005.

[15] T.APOSTOL."Calculus"Editorial Reverte S.A.Barcelona,Vol 2.1980.