CUADRIPOLOS ELÉCTRICOS Y LA SERIE DE FIBONACCI

Two port networks and the Fibonacci numbers

RESUMEN

En este artículo se muestra una íntima relación entre un cuadripolo eléctrico básico y la especial función de Fibonacci. Adicionalmente se exponen ciertas congruencias resultantes del análisis del cuadripolo mencionado y que se encuentran en la teoría de números.

PALABRAS CLAVES: Cuadripolos, Fibonacci, congruencias.

ABSTRACT

This paper shows a close relationship between a basic electric two port networks and the Fibonacci function. In addition, it is shown same congruencies that are presented in the number theory.

KEYWORDS: *two port networks, Fibonacci, congruencies.*

AUGUSTO CANO JARAMILLO
Ingeniero Electricista
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
aucano@utp.edu.co

JORGE EDUARDO CALLE T.
Ingeniero Electricista
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
ject@utp.edu.co

ALEXANDER MOLINA C.
Ingeniero Electricista
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
almo@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En la teoría de redes eléctricas existe una variedad de conexiones de los circuitos eléctricos que son representados mediante cuadripolos o redes de dos puertas y una serie de estos son los parámetros de transmisión de tales cuadripolos que se obtienen con ensayos de circuito abierto y cortocircuito.

Dentro de las conexiones de cuadripolos eléctricos existe una en especial denominada conexión en cascada, que al aplicarse a un cuadripolo específico, arroja resultados como la secuencia de Fibonacci. Tal arreglo permite analizar los números de Fibonacci de manera que es posible encontrar algunas propiedades especiales de éstos.

Este documento pretende demostrar algunas de tales propiedades. Para lo anterior se presenta en la sección 2 consideraciones iniciales, pertinentes para el análisis general de las características de esta conexión.

En la sección 3 se plantean elementos generales acerca de la conexión y una de sus principales propiedades. Posteriormente, en la sección 4, se muestra la manera como se obtienen los números de Fibonacci a partir de la matriz de transmisión de un cuadripolos equivalente y adicionalmente algunas relaciones existentes entre esos números.

Finalmente en la sección 5 se obtienen unas congruencias, derivadas de la reorganización de la matriz de transmisión de un cuadripolo eléctrico básico.

Fecha de Recepción: 30 Mayo de 2007
Fecha de Aceptación: 15 Agosto de 2007

2. CONSIDERACIONES INICIALES

Antes de iniciar el análisis de la situación particular de los cuadripolos es necesario considerar lo siguiente:

Con a, b, n, como variables que toman valores enteros positivos, es posible plantear la ecuación (1).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A(a,b) & B(a,b) \\ B(a,b) & A(a,b)-B(a,b) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ahora, si las funciones $A(a,b)$ y $B(a,b)$ cumplen con lo formulado en la ecuación (2) Entonces existen enteros a y b, en la solución para $A(a,b)$, $B(a,b)$ y χ , que verifican lo planteado en la ecuación (3).

$$A(a,b)\left[A(a,b)-B(a,b)\right]-B^2(a,b)=1 \quad (2)$$

$$\chi^2-5B^2(a,b)=4 \quad (3)$$

Para (3) existen infinitas soluciones si hay al menos una solución no trivial en $B(a,b)$ y χ, según lo plantea Pell [2].

Por otro lado, para el caso de la expansión en a, b, la función explícita (2), si N=2n, es como se propone en (4) y según lo presenta Thue [3].

$$C_0a^N+C_1a^{N-1}b+C_2a^{N-2}b^2+\ldots+C_nb^N=l \quad (4)$$

Con C_0, C_1, C_2, ..., C_n, l, enteros; ésta solo permite una cantidad finita de soluciones enteras y los valores $a=2$, $b=1$, $l=1$ la satisfacen, [3]. Estos valores coinciden con los valores presentados en la ecuación (9).

3. CONEXIÓN DE CUADRIPOLOS EN CASCADA

Un cuadripolo eléctrico, sin fuentes dependientes, con matriz de transmisión $[T]_1$, se puede conectar con otro en cascada y generar uno equivalente cuya matriz de transmisión se puede obtener tal como muestra la ecuación (5).

$$[T]_{eq} = [T]_1 [T]_2 \tag{5}$$

En donde la matriz es

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_1 \tag{6}$$

Para la disposición en cascada presentada en la ecuación (5) sólo es posible obtener conmutatividad en algunos casos.

Ahora, si esta conexión se efectúa n veces con el mismo valor de la matriz se obtiene (7).

$$[T]_{eq} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_1^n = \begin{bmatrix} A_{eq} & B_{eq} \\ C_{eq} & D_{eq} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Si el cuadripolo original $[T]_1$ es recíproco pasivo, aún el cuadripolo equivalente obtenido de la conexión sucesiva en cascada de n de ellos, debe cumplir con lo planteado en la expresión (8). Lo anterior se encuentra ampliamente demostrado en [1].

$$A_{eq}B_{eq} - C_{eq}D_{eq} = 1 \tag{8}$$

4. ARREGLO EN CASCADA Y NÚMEROS DE FIBONACCI.

Si se tiene un circuito tal como se ilustra en la figura 1 se puede expresar su matriz de transmisión como se ilustra en la ecuación (9).

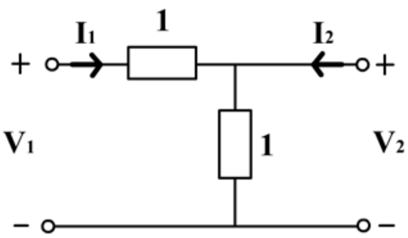

Figura 1. Circuito con impedancias de valor unitario

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Si se realiza un arreglo en cascada de cuadripolos cuyo circuito es el mostrado en la Figura 1 y si se usa la ecuación (7), se obtiene una matriz equivalente que se enseña en (10). Además, ésta matriz refleja un caso particular que valida las ecuaciones (1), (2), (3).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A_{eq} & B_{eq} \\ C_{eq} & D_{eq} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Al analizar cada uno de los elementos A_{eq}, B_{eq}, C_{eq}, D_{eq}, cada uno de ellos corresponde a un número de la serie de Fibonacci, cuando n es un entero positivo. Tal serie se describe en (11).

$$\begin{aligned} &\text{Se define } F(0) = 0 \\ &\text{Se define } F(1) = 1 \\ &F(2) = 1 \\ &F(3) = 2 \\ &F(4) = 3 \\ &\quad\vdots \\ &F(n+1) = F(n) + F(n-1) \end{aligned} \tag{11}$$

La manera como se encuentran los elementos de la serie de Fibonacci dispuestos en la matriz, se expone en la ecuación (12), donde el elemento (2,2) se obtiene a través del resto de elementos de la misma como se ilustra en (13).

$$[T]_{eq} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F(2n+1) & F(2n) \\ F(2n) & F(2n-1) \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$F(2n-1) = F(2n+1) - F(2n) \tag{13}$$

Ahora, con el cuadripolo de transmisión equivalente, que es recíproco y usando la ecuación (8) se llega a la ecuación (14).

$$F(2n+1)\left[F(2n+1) - F(2n)\right] - F^2(2n) = 1 \tag{14}$$

Las soluciones para $F(2n+1)$ para la ecuación cuadrática mostrada en (14) deben satisfacer

$$\chi^2 - 5F^2(2n) = 4 \tag{15}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3), la ecuación (15) acepta soluciones enteras para χ.

Aparte de lo encontrado anteriormente, surgen nuevas relaciones a partir de una nueva representación del equivalente (10). En (16), (17) y (18) se hacen visibles estas relaciones.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+k} = \begin{bmatrix} F(2n+2k+1) & F(2n+2k) \\ F(2n+2k) & F(2n+2k-1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix} F(2n+1) & F(2n) \\ F(2n) & F(2n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(2k+1) & F(2k) \\ F(2k) & F(2k-1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Luego, comparando las ecuaciones (17) y (18) y haciendo *N=2n* y *K=2k*, se obtienen las expresiones (19), (20) y (21).

$$F(N+K+1) = F(N+1)F(K+1) + F(N)F(K) \quad (19)$$

$$F(N+K) = F(N+1)F(K) + F(N)F(K-1) \quad (20)$$

$$F(N+K-1) = F(N)F(K) + F(N-1)F(K-1) \quad (21)$$

Notese que las expresiones entregan similar resultado. Puede usarse, en aras de simplificar la nomenclatura, la expresión (19) o (21), que exponen una relación entre dos números de Fibonacci. El resultado se obtiene considerando la sustentación matemática dada en la sección 2.

5. CASO PARTICULAR DE SUMA MATRICIAL Y LA SECUENCIA DE FIBONACCI.

De la matriz de la izquierda de la igualdad mostrada en (10) se obtienen dos componentes que se ilustran en (22).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n} = \left[2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right]^{n} \quad (22)$$

En esta expresión hay un desarrollo binomial con términos afectados por exponenciales de 2, por la matriz identidad I, además de la matriz **M** descrita en (23).

$$[\mathbf{M}]^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{n} \quad (23)$$

Cuando **M** multiplica *n* veces el valor total de ella produce los valores *F(n)* de Fibonacci tal como es (24).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{n} = (-1)^n \begin{bmatrix} F(n-1) & -F(n) \\ -F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}^{n} \quad (24)$$

Luego de expandir (22) y comparando término a término con (12) aparecen (25), (26) y (27).

$$F(2n+1) = 2^n - \frac{2^{n-1} nF(0)}{1!} + \frac{2^{n-2} n(n-1)F(1)}{2!} - \cdots + (-1)^n F(n-1) \quad (25)$$

$$F(2n) = \frac{2^{n-1} nF(1)}{1!} - \frac{2^{n-2} n(n-1)F(2)}{2!} + \cdots - (-1)^n F(n) \quad (26)$$

$$F(2n-1) = 2^n - \frac{2^{n-1} nF(2)}{1!} + \frac{2^{n-2} n(n-1)F(3)}{2!} - \cdots + (-2)^n F(n+1) \quad (27)$$

Si a las ecuaciones (25) y (27) se resta respectivamente el entero 2, al primer término 2^n, sumándose luego al final de las ecuaciones y con la propiedad sobre los coeficientes del Binomio de Newton para *n=p*, donde *p* es un número primo, se verifica la congruencia (28).

$$\binom{p}{r} \equiv 0 \quad (\bmod\ p) \quad (28)$$

Y adicionalmente cuando se tiene Z entero positivo es válida (29), con Z y *p* primos entre sí.

$$Z^p \equiv Z \quad (\bmod\ p) \quad (29)$$

Para *Z=2*, estas ecuaciones; (25), (26) y (27), se transforman en las siguientes congruencias

$$F(2p+1) \equiv (-1)^p F(p-1) + 2 \quad (\bmod\ p) \quad (30)$$

$$F(2p) \equiv -(-1)^p F(p) \quad (\bmod\ p) \quad (31)$$

$$F(2p-1) \equiv (-1)^p F(p+1) + 2 \quad (\bmod\ p) \quad (32)$$

Finalmente, considerando la ecuación (15) y la ecuación (31), se llega a (33).

$$F(p)\left[F^2(p) - 1\right] \equiv 0 \quad (\bmod\ p) \quad (33)$$

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Un manejo adecuado de los parámetros de transmisión de un cuadripolo con elementos resistivos de valor unitario, demuestra que generan nuevas propiedades sobre Fibonacci.

Se recomienda proseguir un análisis en el caso netamente inductivo y estudiar la manera como se comporta la ganancia de tensión de este cuadripolo básico.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] VALKENBURG, Van. Análisis de redes, cuarta edición, Prentice Hall, 1963.

[2] VINOGRADOV, Ivan. Fundamentos de la teoría de los números. Editorial MIR. 1977.

[3] GUELFOND, Aleksandr Osipovich. Resolución de ecuaciones en números enteros. Editorial MIR. 1977.