UNICIDAD DEL TEOREMA DE MORLEY

Uniqueness of Morley's theorem

FERNANDO VALDÉS M.
M.Sc. Enseñanza de la Matemática
Ingeniero Electricista,
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
fernandov@utp.edu.co

RESUMEN

Se presenta la propiedad Morley y se demuestra que el teorema de Morley es solamente válido cuando m=3; es decir para la trisección. El actual estado del arte en relación con este teorema no hay investigación previa en donde se estudie las posibles soluciones a otras multisecciones angulares que generen un triángulo equilátero [1].

PALABRAS CLAVES: Teorema de Morley, Geometría Clásica, Multisecciones, software Maple.

ABSTRACT

We present the Morley properties and we prove that Morley's Theorem is unique in the case when m=3; that is to say when we have trisection. The state of the art in Euclidian Geometry had not shown a preview research of similar characteristics [1].

KEYWORDS: *Morley's Theorem, Euclidian Geometry, Angular Multiple-sections, Maple Software..*

1. INTRODUCCIÓN

El teorema de Morley (TDM) fue enunciado por el profesor Frank Morley en 1900 [2] y su enunciado es el siguiente: "Los tres puntos de intersección de las trisectrices, de cada ángulo, en cualquier triángulo forman un triángulo equilátero".

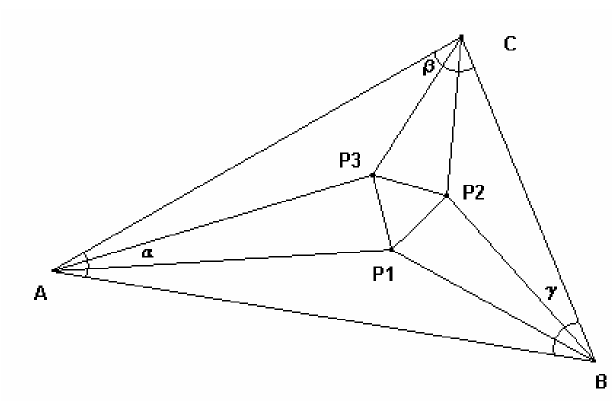

Figura 1. Teorema de Morley.

En la figura 1 aparece un triángulo ΔABC con las trisectrices AP1, AP3 para el ángulo $\measuredangle BAC$; para el ángulo $\measuredangle ABC$ la trisectriz BP1 es adyacente al lado AB y la trisectriz BP2 es adyacente al lado BC. El triángulo P1-P2-P3 es un triángulo equilátero, en cambio el triángulo ΔABC es un triángulo cualquiera.

Existen interesantes demostraciones del TDM y es tal el interés que tiene la comunidad matemática por este curioso teorema que hay demostraciones realizadas utilizando matemáticas modernas, las demostraciones clásicas se hayan en algunos textos incluyendo una demostración realizada por el legendario Profesor Armando Chaves, profesor emérito de La Universidad Tecnológica de Pereira y de la Nacional de Colombia. A continuación se presenta la tabla 1 con los autores más citados

	Autor	Demostración	Ref
1	M. T. Naraniengar	Sintética	[3]
2	M. Satyanarayana	Trigonométrica	[3]
3	Alain Connes	Teoría Grupos	[4]
4	Armando Chaves	Trigonométrica	[5]
5	A. Letac	Trigonométrica	[6]
6	John Conway	Sintética	[7]
7	M. Coxeter	Trigonométrica	[8]

Tabla 1. Tipo de Demostración y Autores.

Surgen algunas inquietudes en relación con los ángulos y su trisección, por ejemplo si en vez de triseccionar los ángulos decidimos tetrasectorizarlos o tal vez de multisectorizarlos; ¿será que las nuevas multisectrices, en especial las adyacentes a sus respectivos lados, pueden cruzarse dando tres puntos que pudiesen formar otro triángulo equilátero?

En la figura 2 los ángulos se han sectorizado en partes iguales, diferente de tres, para este caso particular en cinco, y vemos el triángulo, de lados segmentados,

Fecha de Recepción: 31 Mayo de 2007
Fecha de Aceptación: 16 Agosto de 2007

generado por los tres puntos P, Q, R. ¿Es el triángulo PQR equilátero?, Si no es equilátero para este caso particular entonces la pregunta es ¿Para qué valor de m es otra vez este triángulo ΔPQR equilátero? Se observa que m es el número de sectores iguales que son producidos por las multisectrices.

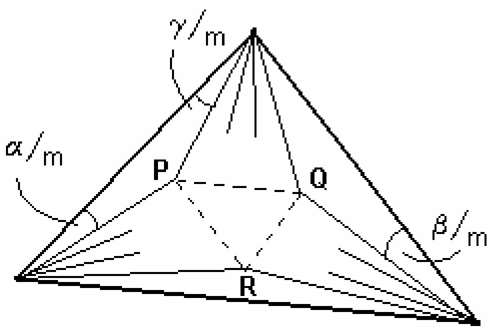

Figura 2. Presentación de Multisectrices, m=5.

Para resolver este problema, Se aplicará geometría analítica. La figura 3. presenta un sistema de ejes cartesianos y sobre este plano se referencia un triángulo cualquiera ABC, aparecen las coordenadas de los vértices y también definiremos las coordenadas del triángulo $\Delta P1P2P3$ como P1(X1, X1); P2(X2, Y2); P3(X3, Y3).

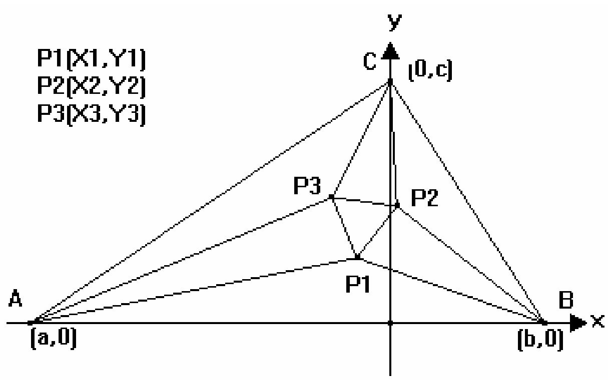

Figura 3. Coordenadas Cartesianas

2. PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES

El criterio para seguir es el siguiente: se desea saber cómo son las longitudes de los segmentos $\overline{P1P2}$, $\overline{P2P3}$ y $\overline{P3P1}$ que son los lados del triángulo $\Delta P1P2P3$; si estas distancias son iguales para un cierto valor de m entonces se encontraría otro triángulo con característica similar al del TDM. O sea que tenemos las ecuaciones básicas:

$$\overline{P1P2} = \overline{P2P3} \quad \text{y} \quad \overline{P2P3} = \overline{P3P1} \qquad (1)$$

Ahora los puntos de las coordenadas tienen las siguientes ecuaciones que se determinan utilizando intersección de rectas y aplicación de trigonometría, tenemos entonces que para el punto X1 su ecuación es:

$$X1 = \frac{a\tan\left(\frac{\alpha}{m}\right) + b\tan\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{m}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{m}\right)} \qquad (2)$$

En la ecuación [2] el término a corresponde a las coordenadas del vértice A siendo este punto (a, 0). Situación similar par el término b que pertenece al vértice B; ver figura 3. Para los vértices del triángulo $\Delta P1P2P3$ las coordenadas del vértice P1 son tanto X1 como Y1, sus ecuaciones son las siguientes:

$$Y1 = \frac{(b-a)\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} \qquad (3)$$

Para el vértice P2(X2, Y2) las ecuaciones quedan así:

$$X2 = \frac{\left(b\cos\left(\frac{\gamma}{m}\right) - c\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} \qquad (4)$$

Se debe de recordar que los ángulos están bien definidos en la figura 2.

$$Y2 = \frac{\left(c\cos\left(\frac{\beta}{m}\right) - b\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} \qquad (5)$$

Para el vértice P3 se tiene que el punto P3(X3, Y3), sus ecuaciones son:

$$X3 = \frac{\left(a\cos\left(\frac{\gamma}{m}\right) + c\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\alpha}{m}\right)} \qquad (5)$$

$$Y3 = \frac{\left(c\cos\left(\frac{\alpha}{m}\right) + a\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\alpha}{m}\right)} \qquad (7)$$

En las ecuaciones anteriores m se puede considerar como un entero.
Las ecuaciones de las coordenadas se emplearán ahora para hallar las distancias entre los puntos que determinan el triángulo $\Delta P1P2P3$.

3. CALCULO DE LADOS

Las distancias entre los puntos que determinan los lados del triángulo interno son las siguientes:

$$\overline{P1P2} = \sqrt{(X1 - X2)^2 + (Y1 - Y2)^2} \qquad (8)$$

$$\overline{P2P3} = \sqrt{(X2 - X3)^2 + (Y2 - Y3)^2} \qquad (9)$$

$$\overline{P3P1} = \sqrt{(X3 - X1)^2 + (Y3 - Y1)^2} \qquad (10)$$

Para los ángulos de triángulo principal como α, β, γ Tenemos las ecuaciones siguientes:

$$\alpha = \begin{cases} -\arctan\left(\dfrac{c}{a}\right) \text{ si } a < 0 \\ \pi - \arctan\left(\dfrac{c}{a}\right) \text{ si } a > 0 \end{cases} \qquad (11)$$

$$\beta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{c}{b}\right) \text{ si b} > 0 \\ \pi - \arctan\left(\dfrac{c}{b}\right) \text{ si b} < 0 \end{cases} \qquad (12)$$

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta) \qquad (13)$$

El próximo paso a seguir es igualar las ecuaciones (8) con (9) y (9) con (10). Al igualar estas ecuaciones y realizar algunas básicas simplificaciones, entonces, obtenemos la ecuación (14) cuya incógnita única es m. La solución se realizar por medio de un software matemático tal como el Maple [9]

Es importante la siguiente observación: si existe un valor de m diferente en la solución de (14) o sea el de la trisección ($m \neq 3$) para cualquier valor de los lados del triángulo ΔABC entonces habría otro triángulo equilátero generado en el interior; es decir si se escoje un valor particular de a, b, c y se resuelve la ecuación (14) al obtener tal valor éste debería de servir para otros valores también de a, b, c , entonces el problema se atacaría de una manera diferente, pero si la ecuación solo tiene solución para $m = 3$ entonces solo tenemos un caso Morley.

La ecuación a solucionar es la (14) en donde la incógnita es m y los valores dados son los de los lados. La ecuación es la siguiente:

$$\left(\frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\cos\left(\frac{\beta}{m}\right) + b\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} - \frac{\left(b\cos\left(\frac{\gamma}{m}\right) - c\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} \right)^2$$

$$+$$

$$\left(\frac{(b-a)\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} - \frac{\left(c\cos\left(\frac{\beta}{m}\right) - b\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} \right)^2$$

$$=$$

$$\left(\frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\cos\left(\frac{\beta}{m}\right) + b\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} - \frac{\left(a\cos\left(\frac{\gamma}{m}\right) + c\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\alpha}{m}\right)} \right)^2$$

$$+$$

$$\left(\frac{(b-a)\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\sin\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\right)} - \frac{\left(c\cos\left(\frac{\alpha}{m}\right) - a\sin\left(\frac{\alpha}{m}\right)\right)\sin\left(\frac{\gamma}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\alpha}{m}\right)} \right)^2$$

(14)

La solución única de esta ecuación es:

$$m = 3 \qquad (15)$$

Lo que nos indica que solamente existe una forma de generar un triángulo equilátero tipo Morley y es cuando se realiza trisección.

4. PROPIEDAD MORLEY

Si se hubiese obtenido un valor de m diferente de tres se tendría algo para llamar, con más idoneidad, propiedad Morley, es decir si otro triángulo equilátero generado por el método antes mencionado; tenemos que exceptuar los casos triviales tales como tomar un triángulo ΔABC equilátero, para este caso m puede tomar cualquier valor.

5. El RECÍPROCO Del TEOREMA De MORLEY

¿Tiene el TDM su respectivo teorema recíproco? La verdad es que no. Cuando se estudia el TDM no hay manera de partir de un triángulo equilátero interior a otro cualquiera y terminar haciendo trisección. La tesis del TDM nos da un triángulo equilátero pero no nos dice dónde aparecerá ni cómo en relación al triángulo principal que lo genera. Entonces para poder tener un teorema recíproco debemos enunciar este teorema de una manera diferente, haremos más adelante entonces una propuesta de enunciado del teorema para que éste pueda tener su parte recíproca.

6. El CONCEPTO DE MULTISECTRIZ

En el estudio de la geometría Euclidiana existen términos tales como bisectriz y trisectriz; se define un útil término, de manera más formal, tal como el de multisectriz así: "Las multisectrices son un conjunto de semirrectas que parten desde el vértice de un ángulo y lo dividen en partes iguales"

7. ENUNCIADO DE UN NUEVO TEOREMA

El TDM es muy específico en cuanto al número de sectores —tres— como debe de dividirse cada ángulo, a partir del nuevo concepto de multisectriz se enuncia el recíproco del TDM de la siguiente manera: "Sea el triángulo cualquiera ΔABC, y sea el triángulo equilátero $\Delta P1P2P3$ cuyos vértices son el corte de las multisectrices adyacentes a los lados del triángulo ΔABC entonces las multisectrices corresponden a las trisectrices del triángulo ΔABC".
Con este enunciado del recíproco del TDM se puede ahora pasar a enunciar el TDM de otra forma utilizando el concepto de multisectriz: "Dado un triángulo ΔABC y sean los puntos P1, P2, P3 las intersecciones de las multisectrices adyacentes a cada lado del triángulo ΔABC, estos puntos definirán un triángulo cualquiera que será únicamente equilátero si las multisectrices corresponden al caso de trisectrices".

8. CONCLUSIÓN

Existe en la geometría teoremas de una gran belleza como es el TDM pero también está la posibilidad de profundizar en ellos buscando la generalidad y la unicidad. Una pregunta muy frecuente en relación con el TDM es por qué no había sido descubierto antes y en especial por los griegos; posiblemente el paradigma de la trisección con regla y compás cerró muchas puertas a la imaginación pero abrió otras. El uso de herramientas tan poderosas como el computador para hallar soluciones numéricas nos ha levado a entender el teorema de los cuatro colores y a resolver la conjetura del Kepler para el almacenamiento óptimo de esferas. El anterior resultado es fácil de visualizar con programas de geometría dinámica como son el Cabri y el Sketchpad, aunque son unas ayudas valiosas seguirá siendo necesario el planteamiento formal.

9. BIBLIOGRAFÍA

[1] VALDÉS Macías, Fernando. Multisectrices en Triángulos: Estudio y Propuesta para un Teorema, Tesis de Grado, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira Mayo del 2006.

[2] ISAACS, I. Martin, Geometría Universitaria, ISBN 970-686-137-8, primera edición, Thomson Learning, Pacto Andino, 2002.

[3] NARANIENGAR, M. T. Mathematical Questions and their Solutions from the Educational Time, 15 (1919), páginas 23-24, 47.

[4] CONNES, Alain, http://www.cut-the-knot.com/ctk/MorleysRedux.shtml.

[5] CHAVES, Armando, Trigonometría, Universidad Nacional, Seccional Manizales, ISBN 958-9322-05-0, 1993.

[6] LETAC, A, Sphinix, 9 (1939) 46, Problem 490.2-05-0, 1993.

[7] CONWAY, John, http://www.cut-the-knot.com/triangle/Morleys/conway.shtml.

[8] COXETER, H.S.M, Fundamentos de Geometría, Editorial Limusa, Mexico, 1971.

[7] MAPLE 10, Maplesoft, Waterloo Division, licensed to Fernando Valdés, Mayo 13, 2005.