

UN MODELO DUAL PARA PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN.

A dual model for portfolio investment

RESUMEN.

El Objetivo básico financiero se fundamenta en crear valor para el inversionista, ya sea maximizar la rentabilidad de la empresa o minimizar la inversión requerida. Lo anterior manifiesta la necesidad de gestar herramientas de fácil manejo para cualquier interesado en invertir en activos financieros, que le permita manejar un conjunto de inversiones a través de modelos de optimización en forma sencilla. Este artículo presenta la construcción de un portafolio de renta fija maximizando la rentabilidad y su modelo dual financiero minimizar la inversión requerida.

PALABRAS CLAVES: activos financieros, crear valor, maximizar, minimizar, optimización, portafolio.

ABSTRACT

The basic financial objective is based on creating shareholder value, either to maximize the profitability or minimize the investment required. This demonstrates the need to gestate friendly tools for anyone interested in investing in financial assets, enabling it to handle a range of investments through optimization models easily. This article presents the construction of a fixed income portfolio to maximize profitability and minimize financial dual model of investment required.

KEYWORDS: *financial assets, create value, maximize, minimize, optimization, portfolio.*

EDUARDO ARTURO CRUZ TREJOS

Ingeniero Industrial, M. Sc.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
ecruz@utp.edu.co

JORGE ANDRÉS URRUTIA MOSQUERA

M. Sc.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
jurrutia@utp.edu.co

PEDRO DANIEL MEDINA VARELA

Ingeniero Mecánico, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
pmedin@utp.edu.co

**Grupo de Investigación
Administración Económica y
Financiera.**

1. INTRODUCCIÓN

La gerencia financiera debe acatar las estrategias establecidas por la dirección general de la empresa y debe cumplir con las tácticas que son de su responsabilidad. Una táctica es el Planeamiento Empresarial: Debe determinar el monto de los recursos exigidos para atender la operación inmediata haciendo uso adecuado del capital de trabajo y para respaldar los proyectos de inversión a largo plazo¹. Debe minimizar el recurso monetario necesario a invertir para desarrollar los proyectos. Una segunda táctica es la política vinculada con la inversión de los recursos monetarios y el manejo en el corto y largo plazo de los excedentes de tesorería temporales. Es necesario en el caso del corto plazo incursionar en el mercado monetario, mientras que si es a largo plazo se debería hacer en el mercado de capitales. La utilización de saldos improductivos de caja o el manejo optimizado de las reservas es una prioridad para elevar los ingresos adicionales del inversionista o de la empresa.

De acuerdo a cifras obtenidas en el movimiento de la bolsa de valores de Colombia², cerca del 80% del valor de las transacciones se concentran en instrumentos de renta fija. De esta manera se puede concluir que las inversiones en productos financieros de renta fija son la opción más utilizada por los inversionistas particulares y por los fondos de inversión. Los últimos atendiendo las disposiciones y normas de la superintendencia financiera sobre los porcentajes de inversión en los diferentes papeles financieros de acuerdo a los riesgos de crédito y mercado. El problema a resolver es: cómo determinar la inversión mínima requerida para una inversión, partiendo de un modelo de inversión maximizando la rentabilidad?.

Para resolver el problema de minimizar la inversión requerida de una inversión, se resuelve con el problema dual financiero de maximizar la rentabilidad de la inversión en instrumentos de renta fija, con las mismas condiciones de desembolsos o salidas de caja.

¹ Ortiz Alberto, Gerencia Financiera, capítulo I, Editorial Mc Graw Hill
Fecha de Recepción: 24 de Enero de 2011
Fecha de Aceptación: 20 de Abril de 2011

² www.bvc.com.co

2. MODELO PRIMAL DE INVERSIÓN MAXIMIZANDO LA RENTABILIDAD

Para exponer el modelo primal de inversión maximizando la rentabilidad se considera la construcción de un modelo matemático que incorpora un grupo de variables, la relación existente entre ellas, y las restricciones de recursos en tiempo y disponibilidad monetaria. Luego se desarrolla el modelo en hoja electrónica de Excel con el complemento Solver a través de un ejemplo de aplicación. Finalmente, se evalúa la decisión a través de la tasa interna de retorno.

2.1 PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL MODELO PRIMAL FINANCIERO³

Como ya se ha planteado, el objetivo de la investigación es desarrollar inicialmente una herramienta que arroje como resultado el portafolio de inversión óptimo con base en un conjunto de títulos del mercado de renta fija, para ello es necesario conocer el modelo matemático que permite llegar al resultado buscado, este modelo se fundamenta en el método de programación lineal. La definición de variables es la siguiente:

A_i = Tasa de interés ofrecida por el título i .

C_j = Cantidad de dinero requerido en el periodo j .

D_j = Tasa de impuestos en el periodo j .

Q_j = Cantidad de dinero de seguridad en el periodo j .

S_j = Saldo inicial en cada periodo j .

R_j = Valor de maduración de los títulos en el periodo j .

X_{ij} = Dinero para invertir en el título i , en el tiempo j .

Z_{ij} = Valor del título i en el momento de invertir en el periodo j .

Con base en las anteriores definiciones, el problema general del portafolio de inversión en renta fija a corto plazo es encontrar los valores de X_{ij} tales que maximicen $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (A_i \cdot X_{ij})$ y que cumplan con todas las siguientes restricciones:

$$S_1 + \sum R_j + \sum (R_j \cdot A_j) - X_{M1} - C_1 - D_1 - Z_{K1} \leq Q_1$$

$$S_2 + \sum R_j + \sum (R_j \cdot A_j) - X_{M2} - C_2 - D_2 - Z_{K2} \leq Q_2$$

$$\dots$$

$$S_N + \sum R_j + \sum (R_j \cdot A_j) - X_{MN} - C_N - D_N - Z_{KN} \leq Q_N$$

$X_{ij}, Z_{ij} \geq 0$, con $(i, j) \in [1, N] \times [1, M]$ donde N equivale al número de periodos y M equivale al número de títulos en el portafolio. Finalmente, el siguiente paso es calcular la tasa interna de retorno.⁴

$$VPN(I) = \sum_{i=0}^{i=N} \frac{FC_i}{(1+I)^i} = 0$$

Para determinar la tasa interna de retorno I del portafolio de renta fija. Donde FC_i corresponde al flujo de caja libre en el periodo i .

2.2 DESARROLLO DEL MODELO DE PORTAFOLIO EN HOJA ELECTRÓNICA DE EXCEL

Para desarrollar el modelo de optimización en Excel, se consideran los siguientes pasos: Se proyecta el flujo de caja y se establece el monto disponible para invertir. Con la proyección se determina los requerimientos o necesidades de efectivo en cada periodo. Se establece el stock de seguridad (remanente para imprevistos es opcional). Se decide sobre el horizonte de tiempo del portafolio. Consultar en el mercado monetario las diferentes alternativas de inversión con las condiciones de rentabilidad y plazo ofrecidas en cada uno de los emisores de títulos en el mercado financiero. Seleccionar las mejores alternativas de inversión y armar el portafolio, teniendo en cuenta el criterio de maximizar el rendimiento financiero.

Se incluyen los datos considerados en el presupuesto de caja: capital disponible, necesidades de efectivo para cada uno de los periodos, el stock de seguridad, las alternativas de inversión en el mercado, y por último, los impuestos sobre rendimientos financieros.

Para probar el modelo se considera un ejemplo con los siguientes datos (cifras en Miles). Ver Figura 1.

	A	B	C	D	E	F					
1	MODELO DE MAXIMIZACIÓN DE LA RENTABILIDAD										
2							DISPONIBLE		88.122		
3							REQUERIMIENTOS DEL PROYECTO				
4	MES	1	2	3	4						
5	REQUERIDO	0	30.000	10.000	50.000						
6	ALTERNATIVAS DE INVERSION										
7	EMISOR	TITULO	PLAZO	INTERES							
8	BANCO 1	A	MENSUAL	1,00%							
9	CORPORACION 1	B	BIMESTRAL	2,10%							
10	BANCO 2	C	TRIMESTRAL	3,10%							

Figura 1. Datos para desarrollar el modelo.

³ CRUZ, Eduardo Arturo; DUARTE, Tito, ARIAS, Leonel. Procedimiento para realizar inversiones en instrumentos financieros utilizando la programación lineal: Scientia et Technica. Año 10, No. 26 (Dic 2004); p. 111-114

⁴ MEZA, Orozco Jhonny de Jesús. Matemáticas financieras aplicadas. Ediciones Ecoe. Tercera edición. 2008, p. 517-525

La construcción de la plantilla en Excel incluye los siguientes elementos: La maduración de los títulos se incluye en la columna del periodo que corresponde de acuerdo al vencimiento de cada uno. El cálculo de los rendimientos obtenidos por cada título se obtiene al multiplicar el valor de la inversión por la tasa de interés ofrecida en cada uno. Los saldos finales para cada período de tiempo se obtiene al totalizar los ingresos compuestos por el saldo inicial más la maduración de los títulos que coincidan en ese período más los rendimientos causados, menos los egresos comprendidos por las inversiones en cada uno de los instrumentos de mercado, menos los requerimientos y los impuestos causados por rendimientos financieros. El Rendimiento total, es la sumatoria de los rendimientos esperados en cada uno de los períodos considerados descontando los impuestos por rendimientos financieros. Ver figura 2.

	A	B	C	D	E	F
15			MES 1	MES 2	MES 3	MES 4
16		SALDO INICIAL	88.122	88.122	58.122	48.122
17		INGRESOS				
18		MADURACION		0	0	0
19		RENDIMIENTOS		0	0	0
20		EGRESOS				
21		INV TIT A				
22		INV TIT B				
23		INV TIT C				
24		IMPUESTOS 7%	0	0	0	0
25		REQUERIDO	0	30.000	10.000	50.000
26		SALDO FINAL	88.122	58.122	48.122	-1.878
27		TOTAL RENDIMIENTOS				0

Figura 2. Flujo de caja del portafolio de inversión

Para la construcción del flujo de caja del portafolio de inversión, se exponen las fórmulas contenidas en cada una de las celdas de la hoja electrónica. Ver figura 3.

CELDA	FORMULA A COPIAR	PEGAR EN EL RANGO
C16	=+C4	D16:F16
C24	=+C19*7%	D24:F24
C25	=+C7	D25:F25
C26	=+SUMA(C16:C19)-SUMA(C21:C25)	D26:F26
D18	=+C21	
D19	=+C21*\$E\$11	
E18	=+D21+C22	
E19	=+D21*\$E\$11+C22*\$E\$12	
F18	=+E21+D22+C23	
F19	=+E21*\$E\$11+D22*\$E\$12+C23*\$E\$13	
F27	=SUMA(C19:F19)	

Figura 3. Fórmulas del flujo de caja del portafolio.

Las condiciones del modelo de portafolio de renta fija para la optimización de la rentabilidad son: La función objetivo es maximizar la rentabilidad. Las celdas a cambiar son las comprendidas entre las filas de las inversiones en los papeles financieros preseleccionados y las columnas de los periodos del modelo. Las

restricciones son: los valores a tomar como inversión deben ser mayores o iguales a cero. Los saldos finales deben ser mayores o iguales al stock de seguridad (opcional). Ver figura 4.

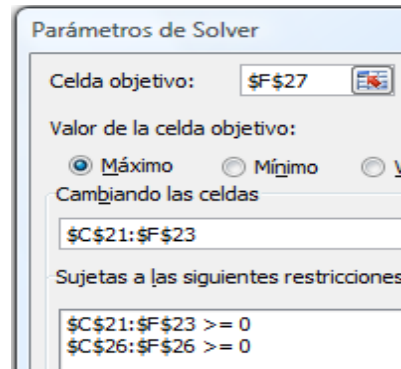


Figura 4. Parámetros del modelo con Solver de Excel.

El modelo construido es de programación lineal.⁵ Los resultados obtenidos se aprecian en la figura 5.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		MODELO DE MAXIMIZACIÓN DE LA RENTABILIDAD				
3		DISPONIBLE	88.122			
4		REQUERIMIENTOS DEL PROYECTO				
5		MES	1	2	3	4
6		REQUERIDO	0	30.000	10.000	50.000
7						
8		ALTERNATIVAS DE INVERSION				
9		EMISOR	TITULO	PLAZO	INTERES	
10		BANCO 1	A	MENSUAL	1,00%	
11		CORPORACION 1	B	BIMESTRAL	2,10%	
12		BANCO 2	C	TRIMESTRAL	3,10%	
13						
14						
15			MES 1	MES 2	MES 3	MES 4
16		SALDO INICIAL	88.122	0	0	0
17		INGRESOS				
18		MADURACION		29.724	58.399	49.539
19		RENDIMIENTOS		297	1.226	495
20		EGRESOS				
21		INV TIT A	29.724	0	49.539	0
22		INV TIT B	58.399	0	0	0
23		INV TIT C	0	0	0	0
24		IMPUESTOS 7%	0	21	86	35
25		REQUERIDO	0	30.000	10.000	50.000
26		SALDO FINAL	0	0	0	0
27		TOTAL RENDIMIENTOS				2.019

Figura 5 Solución al modelo de maximizar la rentabilidad.

EL valor total de los desembolsos es de 90.000, resulta de la suma de 30.000 más 10.000 más 50.000. La empresa

⁵ CRUZ, Eduardo Arturo, MEDINA, Pedro Daniel, ZAPATA, Cesar Augusto. Introducción a la programación lineal, conceptos y prácticas. Ed. Papiro, Pereira, 2009. P. 78-90.

tiene un disponible de 88.122 solamente, pero con las inversiones en el título A y B en el período uno y la reinversión en otro título A en el período tres, logra una rentabilidad de 2.019. Al descontar los impuestos por rendimientos financieros se logra un total de 90.000. El modelo cumple con los requerimientos y no deja activos improductivos en la caja.

Para comparar el modelo de maximizar la rentabilidad frente a otras alternativas de inversión, se determina la tasa interna de retorno de la inversión después de impuestos. El flujo neto de caja se calcula a partir de los ingresos de los títulos que maduran más los rendimientos generados, menos las inversiones en los títulos en cada periodo y los impuestos. Ver Figura 6

	A	B	C	D	E	F
28						
29	FLUJO NETO DE CAJA					
30	PERIODO	MES 1	MES 2	MES 3	MES 4	
31	SALDO	-88.122	30.000	10.000	50.000	
32	TIR MENSUAL	0,96%				
33	TIR ANUAL	12,08%				

Figura 6. Tasa interna de retorno de la inversión.

La tasa interna de retorno mensual obtenida es de 0.96% mensual, al convertirla en tasa de interés efectivo anual⁶, se determina en el 12.08%.

3. MODELO DUAL MINIMIZANDO LA INVERSION

El modelo dual de maximizar la rentabilidad, desde el punto de vista del objetivo básico financiero sería minimizar la inversión requerida para atender los desembolsos de un proyecto de inversión. Es decir, en este caso se desconoce cuánto es el valor inicial disponible para atender los requerimientos y stock de seguridad del flujo de caja después de impuestos.⁷

3.1 PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL MODELO DUAL FINANCIERO

El modelo dual financiero de maximizar la rentabilidad en las inversiones se define así:

A_i = Tasa de interés ofrecida por el título i .

C_j = Cantidad de dinero requerido en el periodo j .

D_j = Tasa de impuestos en el periodo j .

Q_j = Cantidad de dinero de seguridad en el periodo j .

S_j = Saldo inicial en cada periodo j .

R_j = Valor de maduración de los títulos en el periodo j .

X_{ij} = Dinero para invertir en el título i , en el tiempo j .

Z_{ij} = Valor del título i en el momento de invertir en el periodo j .

F_j = Saldo Final en cada periodo j .

Con base en las anteriores definiciones, el problema general del portafolio de inversión es encontrar los valores de X_{ij} tales que Minimicen para $J = 1$.

$$F_j + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^M X_{IJ} + \sum_{J=1}^M (D_j + C_j) - (\sum_{J=1}^M R_j + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^M (A_I \cdot X_{IJ}))$$

Y que cumplan con todas las siguientes restricciones para J diferente de 1:

$$F_2 + \sum_{I=1}^N \sum_{J=2}^M X_{2J} + \sum_{J=2}^M (D_2 + C_2) - (\sum_{J=2}^M R_j + \sum_{I=1}^N \sum_{J=2}^M (A_I \cdot X_{IJ})) \leq Q_2$$

$$F_3 + \sum_{I=1}^N \sum_{J=3}^M X_{3J} + \sum_{J=3}^M (D_3 + C_3) - (\sum_{J=3}^M R_j + \sum_{I=1}^N \sum_{J=3}^M (A_I \cdot X_{IJ})) \leq Q_3$$

...

$$F_N + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^M X_{NJ} + \sum_{J=1}^M (D_N + C_N) - (\sum_{J=1}^M R_j + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^M (A_I \cdot X_{IJ})) \leq Q_N$$

$X_{ij}, Z_{ij} \geq 0$, con $(i, j) \in [1, N] \times [1, M]$ donde N equivale al número de periodos y M equivale al número de títulos en el portafolio. Finalmente, el siguiente paso es calcular la tasa interna de retorno, hallando la tasa de interés que iguale los ingresos a los egresos en el valor presente neto.

⁶ DELGADO, Perea Alejandro. Matemáticas financieras con aplicaciones en los mercados de dinero y de Crédito. Ed. Limusa. 2005. 1ª Edición. Página 76

⁷ INFANTE, Villarreal, Arturo. Evaluación económica de proyectos de inversión. Ed. Banco Popular 1979 Colombia 4ª Edición. Página 167.

$$VPN(I) = \sum_{i=0}^{i=N} \frac{FC_i}{(1+I)^i} = 0$$

3.2 DESARROLLO DEL MODELO DE PORTAFOLIO MINIMIZANDO LA INVERSIÓN INICIAL REQUERIDA

Para desarrollar el modelo de minimización en Excel, se toman los mismos datos para el problema primal de maximizar la rentabilidad. Ver figura 1.

La construcción de la plantilla en Excel incluye los siguientes elementos: La maduración de los títulos se incluye en la columna del periodo que corresponde de acuerdo al vencimiento de cada uno. El cálculo de los rendimientos obtenidos por cada título se obtiene al multiplicar el valor de la inversión por la tasa de interés ofrecida en cada uno. Los saldos finales para cada periodo de tiempo se obtienen del saldo inicial del periodo siguiente, es decir, para el periodo 2, le corresponde el saldo inicial del periodo 3. El saldo inicial corresponde al saldo final más las inversiones, más los impuestos sobre los rendimientos financieros, más los desembolsos requeridos para cada periodo, menos el valor de maduración de los títulos y los rendimientos obtenidos. Las restricciones están dadas por el stock de seguridad requerido en cada periodo. Ver figura 7.

	A	B	C	D	E	F
13			Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
14		SALDO INICIAL	90.000	90.000	60.000	50.000
15		INGRESOS				
16		MADURACION		-	-	-
17		RENDIMIENTOS		-	-	-
18						
19		EGRESOS				
20		INVERSION TIT A				
21		INVERSION TIT B				
22		INVERSION TIT C				
23		IMPUESTOS 7%	-	-	-	-
24		DESEMBOLSOS DEL PROYECTO	-	30.000	10.000	50.000
25		SALDO FINAL	90.000	60.000	50.000	-
26		INVERSIÓN REQUERIDA	90.000			

Figura 7. Flujo de caja inicial

El flujo de caja inicial parte de la suma de los desembolsos más el stock de seguridad. La suma de los desembolsos de 30.000, 10.000, y 50.000 para un total de 90.000.

Las fórmulas requeridas en el modelo de flujo de caja para determinar los valores en las inversiones en los títulos A, B, y C, se presentan en la figura 8. Vale la pena

destacar que el saldo final del último periodo se condiciona a que sea igual a cero, para evitar saldos improductivos en caja.

CELDA	FORMULA A COPIAR	PEGAR EN EL RANGO
C14	=+C25+SUMA(C20:C24)-SUMA(C16:C17)	D14:F14
C23	=+C17*7%	D23:F23
C24	=+C5	D24:F24
C25	=+D14	D25:E25
C26	=+C14	
D16	=+C20	
D17	=+C20*\$D\$9	
E16	=+D20+C21	
E17	=+D20*\$D\$9+C21*\$D\$10	
F16	=+E20+D21+C22	
F17	=+E20*\$D\$9+D21*\$D\$10+C22*\$D\$11	
F25	0	

Figura 8. Fórmulas del flujo de caja

Las condiciones del modelo de portafolio de renta fija para hallar la solución óptima son: La función objetivo es minimizar la inversión inicial requerida. Las celdas a cambiar son las comprendidas entre las filas de las inversiones en los títulos disponibles en el mercado y las columnas de los periodos del modelo. Las restricciones del modelo son: los valores a tomar como inversión deben ser mayores o iguales a cero. Los saldos iniciales deben ser mayores o iguales al stock de seguridad (opcional). Ver figura 9.

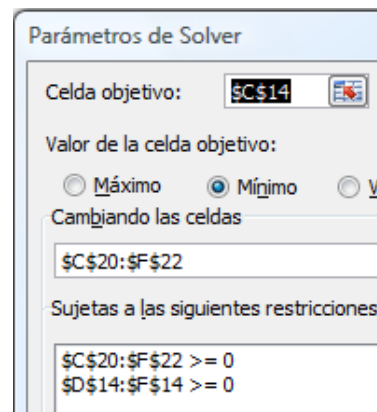


Figura 9. Parámetros del modelo dual con Solver de Excel

Los resultados obtenidos del modelo dual, minimizar la inversión requerida se presenta en la figura 10. El resultado obtenido en la función objetivo es de 88.122, las inversiones se concentran en el Título A y B en el primer periodo y hay una reinversión en el periodo tres en un título tipo A. Al comparar los resultados obtenidos en el modelo primal y el modelo dual, se observa que el plan de inversiones coincide exactamente, y el valor de la mínima inversión es igual a 88.122.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		MODELO DE MINIMIZACIÓN DE INVERSIÓN REQUERIDA				
3						
4		MES	1	2	3	4
5		DESEMBOLSOS	-	30.000	10.000	50.000
6						
7		ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN				
8		TÍTULO	PLAZO	INTERES		
9		A	MENSUAL	1,00%		
10		B	BIMESTRAL	2,10%		
11		C	TRIMESTRAL	3,10%		
12						
13			Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
14		SALDO INICIAL	88.122	0	0	0
15		INGRESOS				
16		MADURACION		29.724	58.399	49.539
17		RENDIMIENTOS		297	1.226	495
18						
19		EGRESOS				
20		INVERSION TIT A	29.724	-	49.539	-
21		INVERSION TIT B	58.399	-	-	-
22		INVERSION TIT C	-	-	-	-
23		IMPUESTOS 7%	-	21	86	35
24		DESEMBOLSOS DEL PROYECTO	-	30.000	10.000	50.000
25		SALDO FINAL	0	0	0	-
26		INVERSIÓN REQUERIDA	88.122			
27						

Figura 10. Resultado final de la optimización lineal.

Para calcular la tasa interna de retorno, se procede de la misma forma al modelo primal: El flujo neto de caja se calcula a partir de los ingresos de los títulos que maduran más los rendimientos generados, menos las inversiones en los títulos en cada periodo y los impuestos. Ver figura 11.

	A	B	C	D	E	F
27						
28		FLUJO NETO DE CAJA				
29		PERIODO	MES 1	MES 2	MES 3	MES 4
30		SALDO	(88.122)	30.000	10.000	50.000
31		TIR MENSUAL	0,96%			
32		TIR ANUAL	12,08%			
33						

Figura 11. Tasa interna de retorno del modelo dual.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los modelos matemáticos son instrumentos esenciales para alcanzar el objetivo básico financiero de crear valor para la empresa a través de la optimización en la toma de decisiones.

La construcción de modelos primales de programación lineal, facilitan la construcción de los modelos duales. En esta publicación se expone a través de un ejemplo

sencillo la aplicación en el campo financiero. En primera instancia maximizando la rentabilidad, y en el segundo caso minimizando la inversión requerida.

Al comparar los dos modelos, se concluye que sus resultados coinciden en la distribución de las inversiones en los mismos títulos, en los mismos periodos de tiempo, y en la tasa interna de retorno.

La evaluación de la tasa interna de retorno en los dos modelos es igual.

La elaboración de los dos modelos se complementan: el primal determina a través de su función objetivo cuál es rentabilidad en pesos del modelo. El dual establece cuánto es la inversión mínima requerida que cumpla con las condiciones de inversión.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ortiz Alberto, Gerencia Financiera, capítulo I, Editorial Mc Graw Hill.
- [2] <http://www.bvc.com.co>
- [3] CRUZ, Eduardo Arturo; DUARTE, Tito, ARIAS, Leonel. Procedimiento para realizar inversiones en instrumentos financieros utilizando la programación lineal: Scientia et Technica. Año 10, No. 26 (Dic 2004); p. 111-114.
- [4] MEZA, Orozco Jhonny de Jesús. Matemáticas financieras aplicadas. Ediciones Ecoe. Tercera edición. 2008, p. 517-525.
- [5] CRUZ, Eduardo Arturo, MEDINA, Pedro Daniel, ZAPATA, Cesar Augusto. Introducción a la programación lineal, conceptos y prácticas. Ed. Papiro, Pereira, 2009. P. 78-90.
- [6] DELGADO, Perea Alejandro. Matemáticas financieras con aplicaciones en los mercados de dinero y de Crédito. Ed. Limusa. 2005. 1ª Edición. Página 76.
- [7] INFANTE, Villarreal, Arturo. Evaluación económica de proyectos de inversión. Ed. Banco Popular 1979 Colombia 4ª Edición. Página 167.