UN TEOREMA FUERTE SOBRE CONVERGENCIA DE FUNCIONES

HECTOR ANDRES GRANADA
Matemático.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
hagranadad@yahoo.es

SIMEON CASANOVA TRUJILLO
Licenciado en Matemáticas y Física M.Sc. Matemáticas.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
scasanovat@unal.edu.co
scasanov2003@yahoo.es

RESUMEN
En este artículo se presenta un resultado relacionado con la convergencia de homomorfismos continuos, el cual es la clave para hacer diferenciabilidad en grupos metrizables.

PALABRAS CLAVES: Espacio métrico, continuidad, compacidad local, compacidad secuencial, homomorfismo de grupos.

ABSTRACT
In this article a result related to the convergence of continuous homomorphism is presented, which is the key to obtain differentiability in metrizable groups..

KEYWORDS: Metric space, continuity, local compactness, sequentially compact, homomorphism of groups.

1. INTRODUCCIÓN

La noción de convergencia o proximidad es la base para el desarrollo del cálculo diferencial para funciones $f : G \to H$ donde G y H son grupos topológicos [1]. Usando la definición de derivada dada en [1], se desarrolló inicialmente por parte de los autores una derivada en grupos metrizables [2]. Debido a que en este último trabajo quedó sin demostrar la regla de la cadena, el espacio de los homomorfismos continuos se dotó con una métrica diferente. Para poder demostrar la regla de la cadena con esta nueva métrica, se hizo necesario establecer un teorema que nos garantice un tipo de convergencia fuerte entre homomorfismos continuos. La compacidad local nos permitió demostrar dicho teorema. Consideramos que este teorema es importante porque en cierta forma nos dice que la convergencia puntual implica la convergencia uniforme.

2. RESULTADO PRINCIPAL.

En esta sección presentaremos el teorema central relacionado con convergencia de funciones.

Definición 2.1. Sean G y H espacios métricos con estructura de grupo. El espacio de los homomorfismos continuos de G en H lo notamos como $\widetilde{H}om(G,H)$ y este espacio lo dotamos con la métrica

$$\tilde{d}(\varphi,\psi) = \sup_{t\in G}\left\{\frac{d_H(\varphi[t],\psi[t])}{1+d_H(\varphi[t],\psi[t])}\right\}$$

Teorema. Sean G,H espacios métricos con estructura de grupo, G localmente compacto, $\varphi : G \to \widetilde{H}om(G,H)$. Si para $t \in G$ vale que $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)[t] = \varphi(a)[t]$, entonces

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$$

Demostración: Para $\varepsilon > 0$ dado, sea $\theta = \min\{1,\varepsilon\}$. Por definición de límite, para $t \in G$ existe $\delta_t > 0$ tal que $d_G(x,a) < \delta_t$ implica

$$d_H(\varphi(x)[t],\varphi(a)[t]) < \frac{\theta}{3-\theta}$$

Como G es localmente compacto, para $a \in G$ existe una bola compacta $\overline{B}_r(a) \subset G$. Para $\overline{B}_{r/2}(a)$ designamos por:

$$T_y = \left\{\begin{array}{l} t \in G : d_G(y,a) < \delta_t \Rightarrow \\ d_H(\varphi(y)[t],\varphi(a)[t]) < \dfrac{\theta}{3-\theta} \end{array}\right\}$$

$T_y \neq \phi$ para todo $y \in \overline{B}_{r/2}(a)$ ya que el elemento neutro de G está en T_y. Para $y \neq a$ sea

$$\overline{B}_{r_y}(y) = \bigcap_{t\in T_y} \overline{B}_{\delta_t}(y)$$

Vemos que $\overline{B}_{r_y}(y) \neq \{y\}$ ya que $a \in \overline{B}_{r_y}(y)$, de donde $r_y > 0$.

Fecha de Recepción: 27 Julio de 2006
Fecha de Aceptación: 28 Febrero de 2007

Para $y \in \overline{B}_{r/2}(a)$ sean $\xi_y = r - d_G(y,a)$ y $B_{\delta_y}(y) = B_{r_y}(y) \cap B_{\xi_y}(y)$. Así, la colección

$$\mathcal{C} = \left\{ B_{\delta_y}(y) : y \in \overline{B}_{r/2}(a) \right\}$$

es por construcción un recubrimiento abierto de $\overline{B}_{r/2}(a)$ y como $\overline{B}_{r/2}(a)$ es compacta entonces del recubrimiento $\mathcal{C}$ podemos extraer un subrecubrimiento finito

$$\wp = \left\{ B_{\delta_1}(y_1), \ldots, B_{\delta_s}(y_s) \right\} \subset \mathcal{C}$$

Es decir, $\overline{B}_{r/2}(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta_i}(y_i)$. De otro lado, para $x \in \overline{B}_{r/2}(a)$ consideremos el conjunto

$$\Omega(x) = \left\{ B_{\delta_i}(y_i) \in \wp : x \in B_{\delta_i}(y_i) \right\}$$

Así, a cada $x \in \overline{B}_{r/2}(a)$ le asignamos el número real

$$r(x) = \min_{B_{\delta_i}(y_i) \in \Omega(x)} \left\{ \delta_i - d_G(x, y_i) \right\} > 0$$

Sea $\delta = \inf \left\{ r(x) : x \in \overline{B}_{r/2}(a) \right\}$. Afirmamos que $\delta > 0$. En efecto, dado que δ es extremo inferior podemos asegurar la existencia de una sucesión real $\{r(x_n)\}$ tal que $r(x_n) \to \delta$ cuando $n \to \infty$, de donde $x_n \in \overline{B}_{r/2}(a)$ para todo $n \in$. Por ser $\overline{B}_{r/2}(a)$ compacta entonces $\overline{B}_{r/2}(a)$ es secuencialmente compacta, así que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \to x_o \in \overline{B}_{r/2}(a)$. Luego, para $r(x_o) > 0$ existe $N \in$ tal que $n_k > N$ implica

$$d_G(x_{n_k}, x_o) < \frac{r(x_o)}{4} \qquad (1)$$

Veamos ahora que $B_{r(x_o)/4}(x_{n_k}) \subset B_{r(x_o)/2}(x_o)$ para $n_k > N$. En efecto, sea $z \in B_{r(x_o)/4}(x_{n_k})$. Entonces

$$d_G(x_{n_k}, z) < \frac{r(x_o)}{4}$$

de donde

$$d_G(z, x_o) \le d_G(z, x_{n_k}) + d_G(x_{n_k}, x_o)$$
$$< \frac{r(x_o)}{4} + \frac{r(x_o)}{4} = \frac{r(x_o)}{2}$$

es decir, $z \in B_{r(x_o)/2}(x_o)$.

Por otra parte, como $r(x_o) > \frac{r(x_o)}{2}$ se tiene que existe $B_{\delta_i}(y_i) \in \wp$ donde

$$r(x_o) = \delta_i - d_G(x_o, y_i)$$

es tal que $B_{r(x_o)/2}(x_o) \subset B_{\delta_i}(y_i)$ y por lo tanto

$$B_{r(x_o)/4}(x_{n_k}) \subset B_{\delta_i}(y_i)$$

para $n_k > N$. De (1) obtenemos que $d_G(x_{n_k}, x_o) < \frac{r(x_o)}{2}$. Luego, de la desigualdad triangular tenemos que:

$$d_G(x_{n_k}, y_i) - d_G(x_o, y_i) \le d_G(x_{n_k}, x_o) < \frac{r(x_o)}{2}$$

o sea que

$$\begin{aligned} r(x_o) - r(x_{n_k}) &= \left(\delta_i - d_G(x_o, y_i)\right) - \\ &\quad \left(\delta_i - d_G(x_{n_k}, y_i)\right) \\ &= d_G(x_{n_k}, y_i) - d_G(x_o, y_i) \\ &< \frac{r(x_o)}{2} \end{aligned}$$

y por lo tanto $r(x_{n_k}) > \frac{r(x_o)}{2}$ para $n_k > N$.

Ahora bien, dado que $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$ y como $r(x_n) \to \delta$ entonces $r(x_{n_k}) \to \delta$. Luego,

$$\lim_{k \to \infty} r(x_{n_k}) = \delta \ge \frac{r(x_o)}{2} > 0$$

En consecuencia, para $x \in \overline{B}_{r/2}(a)$, si $d_G(x,a) < \delta$ entonces

$$d_H\left(\varphi(x)[t], \varphi(a)[t]\right) < \frac{\theta}{3-\theta} \quad \forall t \in G$$

o bien, $d_G(x,a) < \delta$ implica

$$\frac{d_H\left(\varphi(x)[t], \varphi(a)[t]\right)}{1 + d_H\left(\varphi(x)[t], \varphi(a)[t]\right)} < \frac{\theta}{3} \quad \forall t \in G$$

de donde $d_G(x,a) < \delta$ implica

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(a)) = \sup_{t \in G} \left\{ \frac{d_H(\varphi(x)[t], \varphi(a)[t])}{1 + d_H(\varphi(x)[t], \varphi(a)[t])} \right\}$$
$$\le \frac{\theta}{3} < \varepsilon$$

En resumen, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$d_G(x,a) < \delta$ implica $\tilde{d}(\varphi(x),\varphi(a)) < \varepsilon$, es decir, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$

3. CONCLUSIONES

El anterior teorema da condiciones suficientes para garantizar la convergencia de homomorfismos en espacios métricos. Así pues, tenemos una condición suficiente que nos permite afirmar cuando la convergencia puntual implica la convergencia uniforme entre una clase particular de funciones.

4. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y a la DIMA por su apoyo dentro del programa *semilleros de investigación.*

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] ACOSTA G. Ernesto. Differentiability in Topological Groups. Soochow Journal of Mathematics, Volume 22, No.1, pp39-48. January 1996.

[2] GRANADA D. Héctor, CASANOVA T. Simeón. Una derivada en grupos metrizables. Revista Scientia et Technica. Vol. 30, pag. 371-376.

[3] LIPSCHUTZ Seymour. Topología general. Editorial McGraw-Hill, 1970.