

MODELAMIENTO TEÓRICO Y MODELAMIENTO EMPÍRICO DE PROCESOS, UNA SÍNTESIS

RESUMEN

Un modelo se utiliza como herramienta para el diseño y análisis de un proceso o para el diseño de su respectivo sistema de control. Existen tres problemas fundamentales que deben tenerse en cuenta a la hora de obtener modelos de procesos: la formulación del modelo, la estimación de parámetros y la validación del modelo.

El presente artículo pretende mostrar el estado del arte de las dos corrientes actuales empleadas para la obtención de modelos de procesos. Se hace énfasis en los principios involucrados en la estimación de los parámetros desconocidos de un modelo de proceso, y ver lo apropiados que son para el análisis y/o control del mismo.

PALABRAS CLAVES: Modelamiento, estimación, identificación, validación.

ABSTRACT

A model is used as tool for analysis, design and process control system. There exist three fundamental problems that must be born in mind at the moment of the process models: the formulation, the parameters estimation and the validation of the model.

The present article tries to show the actual situation of the knowledge of two actual currents used for obtain process models. Emphasizing in the beginning involved in unknown parameters estimation of the process model, and see it adapted that are for the analysis/control of the same one.

KEYWORDS: Modeling, estimation, identification, validation.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal en el modelamiento del comportamiento dinámico de procesos, es obtener la relación funcional entre las variables que explican su comportamiento. Sin embargo, es imposible capturar perfectamente todos los detalles del comportamiento real del proceso de forma matemática.

Para ello, es común adoptar un estudio desde el punto de vista teórico, que busca plantear la relación a través de la aplicación sistemática de las leyes de naturaleza a los fenómenos, a esto se le conoce como *modelamiento teórico de procesos*.

Por otro lado, un estudio empírico, busca esta desconocida relación por algunas funciones matemáticas, usando la información recogida experimentalmente del sistema, especialmente cuando el proceso es demasiado complicado, y se le conoce como *modelamiento empírico de procesos* o *Identificación de Procesos*.

Abordar un sistema físico y finalmente reducirlo a un modelo de proceso como sustituto para su uso, es un procedimiento que consta de varias etapas: La definición del problema, la formulación del modelo, la estimación de parámetros y la validación del modelo.

Existen varios factores que hacen muy importante el haber definido claramente el alcance del problema que se desea resolver, algunos de éstos son:

- Es imposible representar todos los aspectos del proceso físico, sólo se representan aquellos que son más pertinentes.
- El comportamiento de un proceso puede interpretarse de maneras diferentes.
- Un modelo de proceso es tan útil como las herramientas disponibles para obtener la solución de sus ecuaciones.

Veamos las dos aproximaciones para obtener modelos de procesos y sus diferentes etapas.

2. MODELAMIENTO TEÓRICO DE PROCESOS

Los pasos detallados en el modelamiento teórico de procesos se ilustran en la Figura 1.

2.1. Formulación del modelo

Las leyes físicas que gobiernan el proceso para producir modelos se analizan con ecuaciones que son normalmente complejas y no lineales, éstas pueden involucrar ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones integrales. Por ello el modelo normalmente se simplifica de forma que sea fácilmente manejable.

LUINI LEONARDO HURTADO

Ingeniero Mecánico, M. Sc.

Profesor Adjunto

Universidad Autónoma de Colombia

llhurtado@unal.edu.co

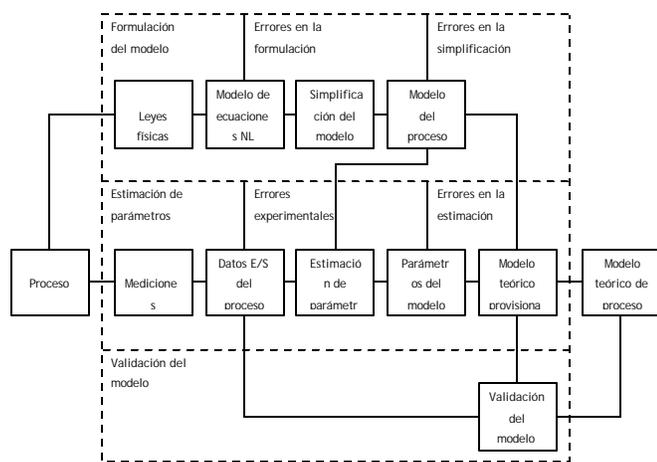


Figura 1. Modelamiento teórico de procesos

La estructura de la ecuación del modelo es fija, y aquellos parámetros que son desconocidos o no conocidos con bastante precisión se estiman usando datos (entrada/salida) del proceso real tomados de experimentos del comportamiento dinámico. Como se indica en la figura, varios errores pueden surgir en cada etapa del desarrollo del modelo, como son:

- *Errores en la formulación del modelo:* por aproximaciones hechas a las ecuaciones del modelo.
- *Errores en la simplificación del modelo:* por aproximaciones hechas al modelo para hacerlo matemáticamente y numéricamente dócil.
- *Errores en las medidas experimentales:* en la recolección de los datos del proceso (tanto errores de calibración como errores aleatorios experimentales)
- *Errores en la estimación de parámetros:* datos que les falta la información esencial necesaria para obtener una buena estimación (p. e. por mal diseño del experimento).

Como resultado de todos estos errores, este modelo provisional debe evaluarse contra los datos del proceso para determinar su eficacia.

2.2. Estimación de parámetros

Como se mencionó, el modelo teórico típico para un proceso consiste de una ecuación diferencial (ordinaria o parcial, lineal o no lineal) con las variables de estado del proceso, entrada y salida (concentraciones, temperaturas, presiones, niveles de líquidos, etc.), como funciones del tiempo, y posiblemente de la posición en el espacio.

Además, estas ecuaciones contienen también los parámetros: tasas de reacción, energías de activación, coeficientes de transferencia de calor, conductividades térmicas, coeficientes de difusión, volatilidades relativas, calores específicos, densidades, etc.

Estos parámetros pueden determinarse por tres maneras:

1. Extrayéndolos de la literatura (p. e. propiedades físicas como densidades, capacidades de calor,

conductividades térmicas, etc., y propiedades termodinámicas de ciertos líquidos y gases, y sus mezclas).

2. Llevando a cabo experimentos independientes (p. e. en un laboratorio) para determinar los parámetros del modelo (a escala industrial).
3. Realizando experimentos sobre el sistema físico, para así determinar los valores de los parámetros desconocidos.

Cuando los parámetros requeridos no están disponibles en la literatura, la única alternativa es estimarlos a partir de datos experimentales, en este caso, el modelo teórico para cualquier proceso puede ser representado de la siguiente forma:

$$\mathbf{h} = f(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \quad (1)$$

donde:

h: Es un vector n -dimensional de salidas del proceso medidas en un experimento.

z: Es un vector m -dimensional de variables independientes especificadas arbitrariamente para cada experimento.

q: Es un vector p -dimensional de parámetros desconocidas.

f: Es alguna relación funcional conocida entre estas variables; y puede ser una función explícita, como un modelo algebraico, una solución analítica de un modelo de ecuación diferencial; o también puede ser una función implícita, como en la propia ecuación diferencial. En resumen:

“La estimación de parámetros se encarga de determinar a partir de datos experimentales, el mejor conjunto de valores para los parámetros desconocidos \mathbf{q} , en un modelo de proceso de forma conocida”.

Cada experimento involucra la medición de todas las n variables de salida $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$, para un conjunto específico de valores de las variables independientes, z_1, z_2, \dots, z_m . Para poder determinar los p parámetros $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p$, independientemente, es necesario realizar por lo menos p experimentos, entre mayor sea el número de experimentos realizados, mejor será la estimación.

El resultado de cada experimento individual es un conjunto de vectores \mathbf{h} y \mathbf{z} que pueden relacionarse al modelo del proceso; en particular, para el k -ésimo experimento, se tiene:

$$\mathbf{h}(k) = f(\mathbf{z}(k), \mathbf{q}); \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

A partir de los experimentos, se nota que las medidas de $\mathbf{h}(k)$ no son exactamente iguales a su verdadero valor debido al error de la medida. Por consiguiente, se diferencia la salida actual del proceso $\mathbf{h}(k)$ de su medida experimentalmente observada, denotada por $y(k)$. La forma funcional de la ecuación (2) no encajará

exactamente con el conjunto de datos observados $y(k)$, sino más bien:

$$y(k) = f(z(k), \mathbf{q}) + \mathbf{e}(k); \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

donde $\mathbf{e}(k)$ es el vector de errores entre la predicción del modelo y los datos actuales.

La estimación de parámetros ahora se centra en la búsqueda del conjunto específico de valores de parámetro $\hat{\mathbf{q}}$ tal que alguna función escalar S del vector de error, sea mínima; es decir, sobre el rango de entrada de los posibles valores de \mathbf{q} , el valor más pequeño de $S(\mathbf{q})$ se da por $S(\hat{\mathbf{q}})$. $S(\mathbf{q})$ es conocida como función objetivo, dado que depende del valor de los parámetros.

Varios criterios son usados para la determinación óptima de los parámetros desconocidos del modelo, el más usado es el criterio de mínimos cuadrados. En este caso, la suma de los cuadrados de los errores es la función a ser minimizada, es decir, $S(\mathbf{q})$ definida como:

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^N [\mathbf{e}(k)]^T [\mathbf{e}(k)] \quad (4)$$

o de la ecuación (3):

$$S(\mathbf{q}) = \sum [y(k) - f(z(k), \mathbf{q})]^T [y(k) - f(z(k), \mathbf{q})] \quad (5)$$

Se observa en la ecuación (5) que la estimación de parámetros prevalece el encontrar el $\hat{\mathbf{q}}$ que da el mínimo S . Así, el problema de estimación de parámetros es realmente un problema de *optimización*, donde la colección de todos los valores de $S(\mathbf{q})$ como una función de desempeño de \mathbf{q} , es una superficie de suma de cuadrados en el espacio p -dimensional de parámetros. Entonces, el objetivo de la estimación de parámetros, es localizar el mínimo global de esta superficie; los \mathbf{q} valores para los cuales este mínimo ocurre se designan como $\hat{\mathbf{q}}$, llamado *estimado por mínimos cuadrados de \mathbf{q}* .

A continuación, se verá cómo los principios anteriores pueden aplicarse a la estimación de parámetros de modelos de proceso que se presentan en términos de ecuaciones diferenciales.

2.2.1. Estimación de parámetros en modelos de ecuaciones diferenciales: soluciones analíticas

Cuando un modelo de proceso posee una solución analítica, el problema de estimación de parámetros se hace más fácil, desde una expresión explícita de la forma dada en la ecuación (2) se obtiene directamente la solución analítica. Se pueden distinguir dos casos separados:

La estimación no lineal, que es la situación más común en los modelos de procesos y se desarrolla en general por

las técnicas numéricas. Sin embargo, es común buscar métodos para los cuales los modelos de procesos pueden reestructurarse en formas que sean lineales en los parámetros. y,

La Estimación lineal: de la ecuación (3), se observa que las medidas experimentalmente obtenidas de las salidas del proceso, obtenidas para varios valores del vector de variables independientes, $z(k)$, se relacionan con el modelo del proceso según:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(k) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z(1), \mathbf{q}) \\ f(z(2), \mathbf{q}) \\ \dots \\ f(z(k), \mathbf{q}) \\ \dots \\ f(z(N), \mathbf{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}(1) \\ \mathbf{e}(2) \\ \dots \\ \mathbf{e}(k) \\ \dots \\ \mathbf{e}(N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Si $f(z, \mathbf{q})$ es lineal en los parámetros \mathbf{q} , entonces puede mostrarse que la ecuación (6) se vuelve:

$$Y = X\mathbf{q} + E \quad (7)$$

donde X es la matriz de variables independientes compilada para cada conjunto de datos; Y es la colección de datos obtenidos experimentalmente a la entrada; y E es la colección de errores.

El problema de estimación de parámetros lineal consiste en encontrar el vector $\hat{\mathbf{q}}$ para el cual la desviación del conjunto de datos Y del modelo $X\mathbf{q}$ (es decir, la magnitud del vector $Y - X\mathbf{q}$), es minimizada, y se da por:

$$\hat{\mathbf{q}} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (8)$$

2.2.2. Estimación de parámetros en modelos de ecuaciones diferenciales: métodos numéricos

Los modelos matemáticos de muchos sistemas reales con bastante complejidad, son manejables por los métodos numéricos, con la ayuda de una computadora. El procedimiento para estimar el conjunto de parámetros desconocidos contenidos en el modelo, es el siguiente: Se empieza asumiendo que el modelo es de la forma:

$$\frac{dT}{dt} = f(n, z, \mathbf{q}, t) \quad (9)$$

donde $f(n, z, \mathbf{q}, t)$ es alguna función no lineal de los argumentos indicados, y \mathbf{q} representa el conjunto de parámetros desconocidos a ser estimados.

Del experimento que se ha realizado sobre el proceso físico se han tomado N medidas independientes del vector de salidas de proceso \mathbf{h} , para las varias escenas de las variables de entrada z y tiempo. Estas medidas son

representadas como y_k , con $k = 1, 2, \dots, N$. En el algoritmo general para la estimación numérica de parámetros:

1. Se inicia con una condición inicial para el valor del vector de parámetros $\mathbf{q}^{(0)}$.
2. Se integra (numéricamente) el modelo del proceso para producir las salidas \mathbf{h}_k del modelo predicho, dado que el valor del vector del parámetro desconocido es $\mathbf{q}^{(0)}$.
3. Se evalúa la función $S(\mathbf{q})$ substrayendo al modelo la predicción \mathbf{h}_k de y_k y se encuentra la norma del vector de la diferencia resultante, es decir:

$$S(\mathbf{q}^{(j)}) = \sum_{k=1}^N [y_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{q}^{(j)})]^2 \quad (10)$$

4. Se actualiza la estimación $\mathbf{q}^{(j)}$; ahora como $\mathbf{q}^{(j+1)}$.
5. Se regresa al paso 2 e iterando, se obtiene S_{j+1} usando la estimación actualizada.
6. Se continua hasta $|S_{j+1} - S_j|$. La actualización final de la estimación es la requerida por la estimación por mínimos cuadrados, $\hat{\mathbf{q}}$.

2.3. Validación de modelos teóricos

Después de que un modelo teórico se ha formulado, y los parámetros desconocidos se han estimado, es importante comprobar que el modelo proporciona una adecuada representación del proceso físico.

Existen varias técnicas para evaluar la eficacia de un modelo teórico, la más práctica, consiste en sobreponer una grafica de la predicción teórica del modelo sobre los datos experimentales obtenidos del proceso físico. Tal evaluación visual proporciona una primera impresión de qué tan bien el modelo representa los datos; y esto normalmente es bastante para decidir mejoras en el modelo, o usarlo tal como es.

3. MODELAMIENTO EMPÍRICO DE PROCESOS Ó IDENTIFICACIÓN DE PROCESOS

Existen varios procesos poco comprendidos, en el sentido de que las leyes fundamentales responsables de su comportamiento dinámico se conocen de manera deficiente o son completamente desconocidas. Es entonces necesario el uso de un método alternativo.

Surgen entonces dos situaciones, una en la que un proceso dinámico debe tratarse como una *caja negra* para obtener una descripción matemática razonable; y otra en que los modelos teóricos resultantes son demasiado complicados para ser usados.

En estos casos, las características del sistema son *identificadas* a partir de su respuesta ante entradas de funciones de excitación conocidas, que da como resultado modelos empíricos de procesos y se conoce como *Identificación de Procesos (o de sistemas)*.

Considérese, la situación que se describe en la figura 2, en la que un proceso desconocido está sometido a una función de excitación, $u(t)$, y la respuesta, $y(t)$ es medida. Es posible desarrollar un modelo para este sistema, correlacionando de manera directa los datos de entrada y salida. En resumen:

“La identificación de procesos involucra la construcción de un modelo de proceso estrictamente a partir de los datos entrada/salida obtenidos experimentalmente, sin recurrir a ninguna ley relacionada con la naturaleza y con las propiedades del sistema”.

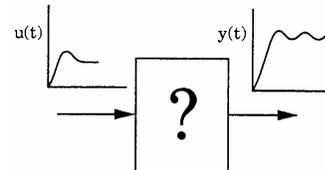


Figura 2. Identificación de Procesos

La identificación, puede, en principio, llevarse a cabo durante el funcionamiento normal del proceso (*On-line*), como en los esquemas de control adaptativo. Sin embargo, la práctica usual es suspender el funcionamiento normal del proceso y realizar experimentos diseñados para el desarrollo del modelamiento empírico (*Off-line*).

El proceso de construcción de un modelo empírico por medio de la identificación, consta de las mismas etapas del modelamiento teórico: la definición del problema, la formulación del modelo, la estimación de los parámetros y la validación del Modelo. La diferencia radica en las dificultades involucradas en cada etapa (ver figura 3).

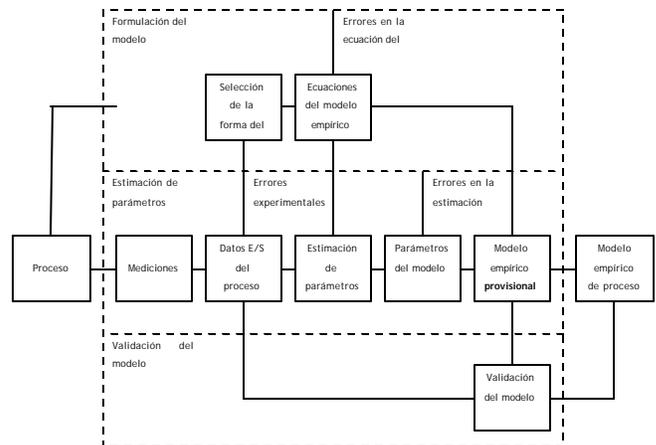


Figura 3. Modelamiento empírico de procesos: Identificación

3.1. Definición del problema

Las consideraciones enumeradas bajo este ítem son pertinentes, independientemente del modelo a adoptarse en el futuro; de hecho, estas consideraciones son las que permitirán escoger, de manera razonable, un método u otro (teórico o empírico).

3.2. Formulación del Modelo

La formulación de modelos, desde el punto de vista empírico, comprende el análisis apropiado de los datos de entrada/salida con el objetivo de detectar una forma capaz de explicar el comportamiento observado. Este paso abarca la *postulación* de modelos (usualmente sencillos) que serán considerados como posibles candidatos.

Los archivos de datos del proceso son para la identificación del proceso, lo que las relaciones constitutivas son para el modelamiento teórico: cada uno de ellos proporciona las bases específicas para el desarrollo del modelo para procesos específicos.

El contenido de información útil del proceso en los datos de salida, depende de la naturaleza de la función de entrada. Por lo tanto, es importante escoger una función de entrada capaz de proporcionar un resultado rico en información útil acerca del proceso. Las funciones de entrada generalmente empleadas en la identificación del proceso son de tipo escalón, impulso, pulso (rectangular o arbitrario), ondas sinusoidales, ruido blanco y secuencias binarias pseudo-aleatorias (PSRB).

La estructura de modelos típicos elegidos en tiempo continuo (representados en forma de función de transferencia), son los siguientes :

Primer orden más retardo de tiempo

$$g(s) = \frac{Ke^{-as}}{ts + 1} \quad (11)$$

Segundo orden más retardo de tiempo

$$g(s) = \frac{Ke^{-as}}{(t_1s + 1)(t_2 + 1)} \quad (12)$$

Cero simple, dos polos más retardo de tiempo

$$g(s) = \frac{K(x + 1)e^{-as}}{(t_1s + 1)(t_2s + 1)} \quad (13)$$

3.3. Estimación de parámetros

Una vez elegido un modelo, se deben estimar sus parámetros desconocidos, de la misma manera que en el modelamiento teórico. En la identificación de procesos, esta es la tarea principal, y puede hacerse en el dominio del tiempo o en el dominio de frecuencia.

En el dominio temporal, las respuestas escalonadas teóricas de los modelos elegidos junto con los parámetros a estimar, de acuerdo con las ecuaciones anteriores, son las siguientes (el tamaño del escalón es A , y $t \geq 0$):

Primer orden más retardo de tiempo

$$y(t) = AK \left(1 - e^{-(t-a)/t} \right) \quad (14)$$

Parámetros: K, t, a .

Segundo orden más retardo de tiempo

$$y(t) = AK \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_1 - t_2} \right) e^{-(t-a)/t_1} - \left(\frac{t_2}{t_2 - t_1} \right) e^{-(t-a)/t_2} \right] \quad (15)$$

Parámetros: K, t_1, t_2, a

Cero simple, dos polos más retardo de tiempo

$$y(t) = AK \left[1 - \left(\frac{t_1 - x}{t_1 - t_2} \right) e^{-(t-a)/t_1} - \left(\frac{t_2 - x}{t_2 - t_1} \right) e^{-(t-a)/t_2} \right] \quad (16)$$

Parámetros: K, t_1, t_2, x, a

Los retardos de tiempo, constantes de tiempo y estado estable obtenidos en este modelo, son estimados comparando estas expresiones con los datos $y(t)$ observados experimentalmente. A excepción del modelo de primer orden más retardo de tiempo, se requiere de los métodos numéricos descritos en el modelamiento teórico.

Para la identificación de la respuesta ante un impulso, la principal estrategia es obtener la función de transferencia a partir de datos de la respuesta al impulso, pero dado que la función impulso es difícil de implementar en la práctica, es posible deducir datos de la respuesta al impulso a partir de otros datos de respuesta más fácilmente obtenibles, tales como respuestas al escalón o pulso, o cualquier función arbitraria de entrada.

En el dominio de la frecuencia, las expresiones de respuesta se obtienen por medio de una prueba de ondas sinusoidales, pero, a pesar de que el método es muy atractivo, presenta desventajas y por ende no es muy usado. El análisis por pulsos, tiene todos los beneficios de la prueba de ondas sinusoidales y evita sus desventajas. La función de transferencia para un proceso de una sola entrada en frecuencia, es:

$$g(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} \quad (17)$$

Cualquier función $f(t)$, que se acerque a cero lo suficientemente rápido como $t \rightarrow \pm \infty$ puede escribirse como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18)$$

donde $\hat{f}(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$. Introduciendo las identidades de Euler y aproximando la integral con una suma, se produce:

$$f(t) = \frac{1}{2p} \Delta w \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(jw) (\cos w_n t + j \operatorname{sen} w_n t) \quad (19)$$

Y de ahí:

$$g(jw) = \frac{A_1(w) - jA_2(w)}{B_1(w) - jB_2(w)} \quad (20)$$

Se pueden ahora usar estos resultados para obtener diagramas de Bode experimentales a partir de los resultados de los análisis de pulsos, las expresiones de la amplitud y el ángulo de la fase para cada una de las frecuencias se obtiene a partir de:

$$AR(w) = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2}{B_1^2 + B_2^2}} \quad (21)$$

y

$$f(w) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[g(jw)]}{\operatorname{Re}[g(jw)]} \right\} \quad (22)$$

En principio, una vez postulados los mejores modelos por medio del análisis del diagrama de Bode obtenido experimentalmente, la estimación de los parámetros puede realizarse en el campo de la frecuencia, usando los datos de la frecuencia, o directamente en el dominio del tiempo, utilizando los datos a intervalos netos de tiempo.

A partir de las ecuaciones anteriores, se obtiene para la entrada:

$$|\hat{u}(jw)| = \sqrt{B_1^2(w) + B_2^2(w)} \quad (23)$$

y para la salida:

$$|\hat{y}(jw)| = \sqrt{A_1^2(w) + A_2^2(w)} \quad (24)$$

Con una gráfica de la ecuación (23) contra la frecuencia da el *espectro de frecuencia* de entrada: la gráfica correspondiente de la ecuación (24) proporciona el *espectro de frecuencia*. A partir de estos espectros de frecuencia podemos determinar qué porciones del diagrama de Bode contiene información útil.

3.4. Validación del modelo

Así como en el modelamiento teórico, el paso final en la identificación del proceso comprende verificar cómo el modelo empírico se acomoda a los datos, que supuestamente representa. La validación del modelo se realiza generalmente comparando los pronósticos de los modelos con datos adicionales y evaluando la adaptación. Esto puede realizarse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

4. CONCLUSIONES

Las etapas fundamentales en el procedimiento de desarrollo de modelos de procesos son: la definición del

problema, la formulación teórica o empírica del modelo, la estimación de parámetros por medio de experimentos u obtenidos de la literatura, y la validación, que se logra probando el modelo contra los datos experimentales.

Cuando los mecanismos subyacentes por los que un proceso opera son bien entendidos, se adopta un estudio teórico fundamentado en principios naturales y se denomina *modelamiento teórico de procesos*, pero, cuando el proceso es demasiado complicado, porque la información disponible sobre la naturaleza del mismo es poca o porque las ecuaciones del modelo teórico son demasiado complejas, se debe recurrir al *modelamiento empírico de procesos* o *identificación de procesos*.

El modelamiento empírico de procesos o identificación de procesos, puede realizarse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia, mediante prueba con pulsos.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Babatunde A. Agunnaike and W. Harmon Ray. *Process, Modeling and Control*. Oxford University Press. 1994.
- [2] Kunusch Cristian. Cátedra de control y servomecanismos: *Identificación de sistemas dinámicos*. Universidad Nacional de la Plata. Facultad de Ingeniería. 2003.
- [3] Escobet Teresa y Morcego Bernardo. *Identificación de Sistemas*. Curso semipresencial, tele-enseñanza. Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial. Escola Universitària Politècnica de Manresa. 2003.
- [4] Ljung Lennart. *System Identification, theory for the user*. 2nd edition. Prentice Hall PTR, Prentice Hall Inc. 1.999.
- [5] Ljung Lennart. *Identification for control: What is there to learn?* In Proceedings of Workshop on Learning Control and Hybrid Systems. Bangalore, India. 1998.
- [6] Meade, M. L. and Dillon, C. R. *Signal and Systems: Models and Behaviour*. 2nd edition. Chapman & Hall. London, England. 1991.
- [7] Norton, J. P. *An Introduction to Identification*. Academic Press Inc. (London) Ltd. 1986.
- [8] Schoukens, J. y Pintelon, R. "*Identification of Linear Systems: a Practical Guideline to Accurate Modeling*". Pergamon Press, 1991.
- [9] Söderström, T. and Stoica, P. *System Identification*, Prentice Hall, N.J., 1989.
- [10] Urban Forssell. *Closed-loop Identification. Methods, Theory and Applications*. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 566. 1999.
- [11] Van den Bosch Paul P. J. *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*. CRC. 1994.
- [12] Sinha N. K. Kuszta B. *Modeling and Identification of Dynamic Systems*. Springer. 1983.