ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN MODELOS ARMA POR EL CRITERIO DE MÍNIMOS CUADRADOS

LUIS CARLOS RÍOS
Ingeniero Mecánico, Ms.C.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
lcrios@utp.edu.co

NICOLÁS TORO
Ingeniero Electricista, Ms.C
Profesor Asistente
Universidad Nacional sede Manizales
ntoroga@unal.edu.co

RESUMEN
La estimación de parámetros es una de las técnicas con que cuenta la ingeniería de control para desarrollar modelos que logren aproximarse al comportamiento real de planta, esta aproximación del modelo lo garantiza el método de estimación, que en este caso es el criterio de mínimos cuadrados. Se presenta un desarrollo detallado del algoritmo de estimación y el acondicionamiento del sistema en modelos ARMA, luego se recrea gráficamente los resultados obtenidos donde se demuestra la fiabilidad del método usado.

PALABRAS CLAVE: Modelos ARMA, planta, estimación, parámetros

ABSTRACT
The estimation of parameters is one of the techniques whereupon it counts the control engineering to develop models that manage to come near to the real behavior of plant, this approach of the model guarantees the estimation method to it, that in this case is the criterion of square minimums. A detailed development of the estimation algorithm appears and the preparation of the system in models WEAPON, soon recreates graphically the obtained results where the reliability of the used method is demonstrated.

KEY WORDS: ARMA models, plant, estimation, parameter

1. INTRODUCCIÓN

En principio hay dos formas diferentes de obtener los modelos: a partir de un conocimiento previo, es decir, en términos de leyes físicas, o por experimentación sobre un proceso.
Un proceso no puede caracterizarse por un único modelo matemático. Debe representarse por una jerarquía de modelos que van desde los detallados y complejos de simulación hasta los muy sencillos, fáciles de manipular analíticamente.
El control automático de sistemas requiere del conocimiento del modelo matemático que represente el comportamiento del mismo.

Las estructuras del modelo se sacan del conocimiento previo del proceso y de las perturbaciones. En algunos casos el único conocimiento previo que se tiene es que el proceso se puede describir como un sistema lineal en un rango de operación concreto. Entonces es natural utilizar representaciones de sistemas lineales de tipo general. Estas representaciones se conocen como *modelos de caja negra*. Un ejemplo típico es el modelo de ecuación en diferencias.

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k)$$

Donde $\boldsymbol{u}$ es la entrada, $\boldsymbol{y}$ es la salida y $\boldsymbol{e}$ es una perturbación de tipo ruido blanco. Los parámetros, así como el orden de los modelos, se consideran como parámetros desconocidos.

Algunas veces es posible aplicar leyes físicas para obtener modelos de procesos que contienen solamente algunos parámetros de valor desconocido. El modelo puede ponerse en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,v,\theta) \\ y = g(x,u,e,\theta) \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de los parámetros desconocidos, $\boldsymbol{x}$ es el vector de estados del sistema, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{e}$ son perturbaciones.
Otro método utilizado para el desarrollo del modelo del sistema utiliza información generada de un diseño experimentos aplicados al sistema, lo que se conoce como identificación de sistemas. Una distinción general se realiza entre métodos en *línea (on line) y fuera de línea (off line).* Los métodos en línea dan las estimaciones en forma recursiva, cuando se obtienen las medidas, y son la única alternativa si la identificación se va a utilizar en un controlador adaptativo o si el proceso es de tipo variable. En muchos casos los métodos de fuera de línea dan precisiones mayores y son más fiables, por ejemplo, en términos de convergencia.

2. CONTENIDO

2.1 En este proyecto se utiliza la estimación de parámetros en modelos ARMA (Autoregressive, Moving Average). Estos modelos son basados en la representación de la planta, que consiste en un formato en el cual la salida $y(t)$ actual se expresa como una función

Fecha de Recepción: 30 Enero de 2006
Fecha de Aceptación: 20 Junio de 2006

lineal de salidas pasadas $y(t-j)$ y de las entradas pasadas $u(t-j-d)$, donde d es el retardo.

Tomando la función de transferencia en tiempo discreto

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_k z^{-k}}$$

correspondiente a la ecuación de diferencia

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \cdots + b_k u_{n-k}$$

Si las secuencias de las entradas $\{u_i\}$ y salidas $\{y_i\}$ son conocidas es posible formar un conjunto de ecuaciones lineales de las cuales los parámetros a_i y b_i del modelo ARMA se puedan determinar.
Específicamente, para un sistema de orden k es posible en principio determinar $2k$ parámetros con $2k+1$ muestras de la entrada y la salida de la ecuación de diferencia.

$$\begin{aligned}
y_n &= -a_1 y_{n-1} - \cdots - a_k y_{n-k} + b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + b_2 u_{n-2} + \cdots + b_k u_{n-k} \\
y_{n+1} &= -a_1 y_n - \cdots - a_k y_{n-k+1} + b_0 u_{n+1} + b_1 u_n + b_2 u_{n-1} + \cdots + b_k u_{n-k+1} \\
&\vdots \\
y_{n+2k} &= -a_1 y_{n+2k-1} - \cdots - a_k y_{n+k} + b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + b_2 u_{n+2k-2} \\
&+ \cdots + b_k u_{n+k}
\end{aligned}$$

luego $\boldsymbol{y} = \varphi\theta$ de aquí que $\theta = \varphi^{-1}\boldsymbol{y}$

donde, θ es el vector de parámetros del modelo del sistema, φ es la matriz de mediciones de la entrada y la salida.

El problema de estimación, tiene soluciones diferentes dependiendo del número de medidas y el número de parámetros. En este proyecto se utiliza el algoritmo de mínimos cuadrados[29]

2.2 Métodos de Estimación de Parámetros

Resolver el problema de estimación de parámetros requiere lo siguiente:

Datos de entrada-salida del proceso.
Una clase de modelos.
Un criterio.

La estimación de parámetros se puede formular como un problema de optimización, en el que el mejor modelo es aquel que mejor se ajusta a los datos de acuerdo con un criterio dado.

El resultado de un problema de estimación depende, naturalmente, de como se formule el problema. Por ejemplo, el modelo obtenido depende de la amplitud y del contenido de frecuencias de la señal de entrada. Hay muchas posibilidades de combinar condiciones experimentales, clases de modelos y criterios. También hay muchas formas distintas de organizar los cálculos. Por consiguiente, hay disponibilidad de un gran número de métodos de identificación.

2.3 Criterios

Cuando se formula un problema de identificación se introduce un criterio para tener una medida de hasta que punto un modelo se ajusta a los datos experimentales. El criterio se puede postular. Mediante hipótesis estadística se pueden deducir criterios de base probabilística. Con frecuencia los criterios para sistemas discretos se expresan en la forma

$$\varepsilon = y - \hat{y}$$

$$\hat{y} = \phi\theta$$

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N} g(\varepsilon(k))$$

donde ε es el error de entrada, el error de salida o un error generalizado. El error de predicción es un ejemplo típico de error generalizado. Frecuentemente se elige la función $\boldsymbol{g}$ de tipo cuadrático, pero puede ser de muchas otras formas.

La primera formulación, solución y aplicación de un problema de identificación se debe a Gauss en su famosa determinación de la órbita del asteroide Ceres. Gauss formuló el problema de identificación como un problema de optimización e introdujo el principio de los mínimos cuadrados, un método basado en la minimización de la suma de los cuadrados del error. Desde entonces, el criterio de mínimos cuadrados se ha utilizado ampliamente.

2.4 El Principio de Mínimos Cuadrados

El método de mínimos cuadrados se puede emplear para identificar parámetros en sistemas dinámicos [29].
En el problema general de mínimos cuadrados se propone que "la variable calculada" $\hat{y}$, en la terminología de Gauss, viene dada por el modelo que se presenta en la siguiente ecuación:

$$\hat{y} = \theta_1\varphi_1(x) + \theta_2\varphi_2(x) + \cdots + \theta_n\varphi_n(x)$$

Donde $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ son funciones conocidas y $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ son parámetros desconocidos. Mediante un experimento se obtienen pares de observaciones $\{(x_i,y_i), i = 1, 2, ..., N\}$. El problema es determinar los parámetros de tal forma que las variables $\hat{y}_i$ calculadas mediante el modelo identificado por la ecuación (3.5) y los valores experimentales x_i coincidan lo más posible con las variables medidas y_i. Suponiendo que todas las medidas tienen la misma precisión, el principio de mínimos cuadrados dice que los parámetros se deben elegir de tal forma que la función de costo

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{2}\|\varepsilon\|^2$$

donde

y $$\hat{y} = \phi\theta$$

Hay que determinar el parámetro θ de tal forma que ε^2 sea mínimo.

Las ecuaciones de estimación propuestas en este método son:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(N+1) &= \hat{\theta}(N) + K(N)\left[y(N+1) - \varphi(N+1)\hat{\theta}(N)\right] \\
K(N) &= P(N+1)\varphi^T(N+1) \\
&= P(N)\varphi^T(N+1)[1+\varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1} \\
P(N+1) &= [I - K(N)\varphi(N+1)]P(N)
\end{aligned}$$

La matriz P es la matriz de covarianzas y se inicializa con un valor grande, el cual va disminuyendo en la medida en que se lleva a cabo la estimación. La matriz K es la matriz de ganancias, relacionada con la velocidad de convergencia de la estimación.

La señal de entrada del sistema debe tener un alto contenido de frecuencias, con el objeto de excitar la mayor cantidad de modos del sistema.

3. EL SISTEMA

El modelo del sistema se toma de la fuente [2] y presenta las siguientes matrices que lo representan en el espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 66{,}66 & 0 & 66{,}66 \\ 0 & -0{,}666 & -0{,}6666 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

4. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

En el programa de estimación se insertaron las matrices A, B, C y D, posteriormente se discretizó el sistema y se asignó una entrada aleatoria (u). Con el modelo discretizado se obtuvo la función de transferencia y se evaluó la salida (y) para la entrada asignada. Con los pares (y,u) se realizó la estimación por el principio de mínimos cuadrados, el algoritmo se realizó en Matlab® y presenta la siguiente estructura:

```
%programa de estimación recursiva de parámetros
%mediante el criterio de mínimos cuadrados

A=[-4 0 0; 66.66 0 66.66; 0 -0.6666 -0.6666];
B=[-4;0;0];
C=[0 0 1];
D=[0];
ts=0.01;
sistema=ss(A,B,C,D);
[Ad,Bd,Cd,Dd]=c2dm(A,B,C,D,ts)
TF=tf(sistema);
[Num,Den]=tfdata(sistema)
[Numd, Dend]=c2dm(Num, Den, ts)
sistemad=ss(Ad,Bd,Cd,Dd,ts);

%Función de transferencia discreta
Tfd=tf(sistemad);
k=zeros(6,1);
p=1e20*eye(6);
lambda=.95;
u=sign(randn(100,1));

%modelo en el espacio de estados
mod=idss(Tfd);

%vector de respuestas del modelo (valor real)
y=sim(mod,[u]);

for j=1:length(u)-1
   y(j)=y(j+1);
end

te=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]';
e=0;

for N=4:length(u)-1

   Fi=[-y(N-1) -y(N-2) -y(N-3) u(N)
      u(N-1) u(N-2)];
   te=te+k*e;

 %estimación de los parámetros
   te1(N)=te(1);te2(N)=te(2);te3(N)=te(3);
   te4(N)=te(4);te5(N)=te(5);te6(N)=te(6);
   k=p*Fi'*inv(lambda+Fi*p*Fi');
   p=(1/lambda)*(p-k*Fi*p);
   Yest=Fi*te;
```

```
    %estimación del error
    e=y(N)-Yest;
    error(N)=e;
    Ye(N,1)=Yest;
end
```

5. SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

El sistema utilizado para aplicar el método de estimación tiene la siguiente función de transferencia. Se pueden observar los valores de los parámetros, que si el método de estimación es adecuado, se deben obtener los mismos valores.

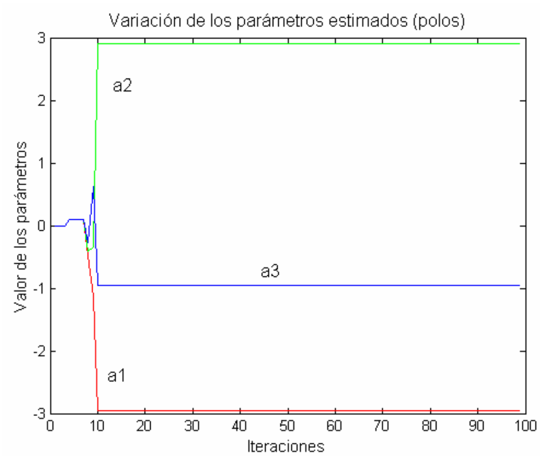
$$G(z) = \frac{2{,}927e\text{-}005\, z^2 + 0{,}0001157\, z + 2{,}86e\text{-}005}{z^3 - 2{,}95\, z^2 + 2{,}904\, z - 0{,}95}$$

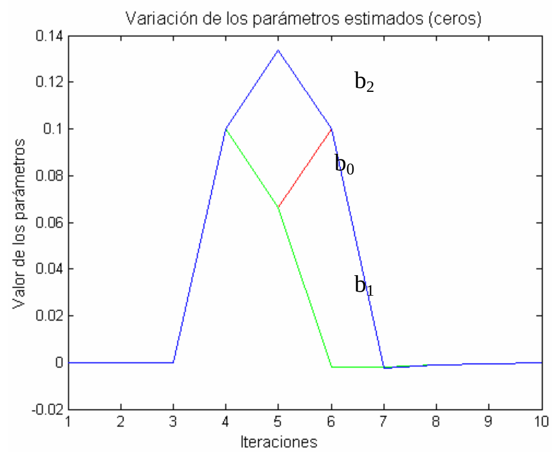
Aplicando el criterio de mínimos cuadrados y simulando el algoritmo para 1oo datos (muestras), obtenemos los siguientes resultados:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}9497 \\ 2{,}9043 \\ -0{,}9594 \\ 2{,}9274e-5 \\ 1{,}157e-4 \\ 2{,}8599e-5 \end{bmatrix}$$

Se observa que los parámetros obtenidos por estimación tiene el mismo valor que los parámetros de la función de transferencia en tiempo discreto del sistema, de tal forma que se concluye la gran eficiencia del método de estimación.

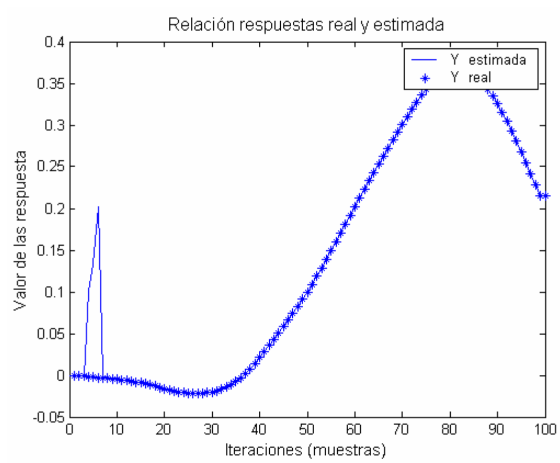
Las predicciones teóricas de convergencia de parámetros, dicen que el número de iteraciones o muestras aproximado para obtener el valor final de un parámetro es de 2k+1, donde k es el orden del sistema anlizado. Para este caso K=3, por lo tanto el número de iteraciones o muestras es de 7. En las gráficas siguientes se muestra la rapidez de convergencia de parámetros.





En las gráficas anteriores se observa que la convergencia de parámetros se obtiene en aproximadamente 10 iteraciones, lo cual demuestra la predicción.

Para observar el comportamiento del sistema real y el estimado se tiene la siguiente gráfica:



Se ve claramente como el estimado sólo diverge al comienzo del la gráfica mientras convergen los parámetros estimados.

Otra gráfica que muestra la efectividad del método es la de error.

6. CONCLUSIÓN

Para el sistema asignado, representado en modelo ARMA, al cual se le realizó la estimación recursiva de parámetros utilizando el criterio de mínimos cuadrados, obtuvimos que el método es adecuado y que presenta una señal de error muy pequeña y una convergencia rápida de los parámetros estimados a los valores reales.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] TORO N. RIOS L. C. AVENDAÑO L.E. Aplicacion de un control adaptativo en el posicionamiento de un robot cartesiano. Trabajo de Grado. Programa de Maestria en Sistemas automaticos de Produccion-. Universidad Tecnologica de Pereira.

[2]Åströn, Karl Johan - Wittenmark, Björn. "*Adaptive Control*". Addison-Wesley 1989.

[3]Mosca, Edoardo. "*Optimal, Predictive and Adaptive Control*". Prentice Hall, 1995.

[4] LJUNG, Lennart. System Identification - Theory For the User. Prentice Hall 1987

[5]Canales Ruiz R. Barrera R. R. "*Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático*". Ed. Limusa 1977.

[6]Frieland, Bernard. "*Advanced Control Systems Design*". Prentice Hall 1996.

[7]Ljung, Lennart. "*System Identification - Theory for the User*". Prentice Hall. Math Works 1995.

[8]Ogata, Katsuhiko. "*Discrete-Time Control System*". Prentice Hall 1987