LA DEMOSTRACIÓN ELEMENTO VIVO EN LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

RESUMEN
En este artículo se aborda la discusión filosófica en torno al tema de la validez de la demostración, su importancia en la didáctica de la matemática y su papel como elemento transformador del pensamiento.

PALABRAS CLAVES: Demostración matemática, didáctica, enseñanza

ABSTRACT
This paper deals with the philosophical discussion about the validity of proofs, their importance on mathematic didactics and their role as a transforming element of thought.

KEYWORDS: *Mathematical Proof, didactics, teaching.*

HUGO HERNAN ORTIZ A.
Esp.Educación, Ingeniero Químico.
Estudiante Maestría en Enseñanza de la Matemática UTP.
Profesor
Universidad Autónoma de Mles
Línea de Investigación en Enseñanza de la Matemática
hugoral68@hotmail.com

FRANCY NELLY JIMENEZ G.
Magíster en Física UNAL.
Profesora
Universidad Autónoma de Mles
Línea de Investigación en Enseñanza de la Matemática
francy@manizales.autonoma.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En la búsqueda permanente de criterios que ayuden a definir un camino más claro en la enseñanza de la matemática, nos encontramos con cierta frecuencia paradigmas que nos obligan a replantear nuestros métodos. La matemática no es una ciencia estacionaria si no que se renueva permanentemente y así mismo los juicios valorativos de todas aquellas componentes que a lo largo del tiempo han construido los cimientos de esta disciplina, al respecto Paul Halmos (1980) se hace la pregunta:

¿En qué consiste realmente la matemática? Los axiomas?, los teoremas?, las demostraciones?, las definiciones?, las teorías, las fórmulas?, los métodos?. La matemática seguramente no existiría sin estos ingredientes, todos ellos son esenciales. Es, sin embargo sustentable que ninguno de ellos es el meollo de la disciplina, que la razón principal para la existencia del matemático es la resolución de problemas, y que por consiguiente, la matemática realmente consiste de sus problemas y soluciones.

Es claro el papel que juegan las demostraciones en el ámbito de los matemáticos, pero al parecer aún no lo es tanto su rol en la enseñanza de las matemáticas, algunos investigadores en didáctica de la matemática apoyados en el trabajo hecho por Lakatos abiertamente desestiman el valor de la demostración en la construcción del conocimiento matemático, y afirman que su estudio en los salones de clase puede generar problemas de aprendizaje en algunas personas, sobre todo para aquellos que no estudian para ser matemáticos y que no están obligados a apreciar "la belleza y la estética de los teoremas y demostraciones matemáticos" ni mucho menos compartir su misma motivación.

Para los profesores de asignaturas de matemáticas para no matemáticos es una experiencia diaria la dificultad de abordar demostraciones en el aula de clase por la predisposición de los estudiantes que ven en ellas una actividad innecesaria en la cual son sujetos pasivos, para la cual no están preparados, no encuentran aplicaciones inmediatas y sobre todo exigen un esfuerzo mental muchas veces frustrante que debería ser usado tal vez en abordar problemas de aplicación relativos a sus carreras

No pocos docentes piensan que realmente no debería hacerse tanto énfasis en la demostración en asignaturas para no matemáticos, consideran que es muy difícil cuando no imposible enseñar a demostrar y que a lo más deben contentarse con repetir demostraciones suyas o de otros autores que el estudiante debe aprender sin que al parecer contribuyan a un mejor desempeño académico y profesional del mismo. En unión a lo anterior se tiene que el advenimiento de nuevas tecnologías ha permitido la aparición de otras formas de demostración, en opinión de expertos, semi-rigurosas que potencialmente podrían desplazar la demostración formal por algoritmos de computación cada vez más elaborados y autónomos en los cuales la mediación humana se haga innecesaria. Y dado lo anterior, ¿por qué preocuparse de hacer demostraciones?

En el presente artículo se intentará mostrar como la demostración en la enseñanza de las matemáticas cumple un papel que va más allá del hacer evidente la veracidad de un teorema matemático o del descubrimiento de uno nuevo, y como sigue siendo herramienta fundamental en el quehacer matemático, en la formación del pensamiento lógico del individuo y en otros valores agregados que se discutirán más adelante.

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2006
Fecha de Aceptación: 01 Junio de 2006

2. CONTENIDO

2.1 ¿Qué se entiende por demostración?

Según Muller [1]: "Sea un sistema de proposiciones X. Una demostración de la proposición Q es una sucesión finita de expresiones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que terminan en Q y que satisface para cada término Q_i una de las siguientes condiciones: Q_i pertenece a X o Q_i puede deducirse de expresiones precedentes, o expresiones de X mediante una regla de inferencia".

Sobre lo anterior, Macias, Nápoles et al [2], afirman: "Esta definición expresa claramente que una demostración no es una "cadena lineal" de expresiones Q en que cada término Q_i resulta del término precedente Q_{i-1}". "Además se reconoce también que la definición del concepto demostración, naturalmente no indica en que forma puede encontrarse una demostración de un teorema especial".

De lo anterior es bueno mencionar la aparición de otros tipos de demostración que no caen dentro del formalismo anterior, como son la demostración a conocimiento cero (Blum 1986) [3] y la demostración holográfica (Babai, 1994 [4]).

2.2 El valor de la demostración, ¿Un problema filosófico?

Es innegable la influencia que sobre el estudio del papel de la demostración en la didáctica de las matemáticas han tenido las ideas de Imre Lakatos en especial en su trabajo "Proofs and refutations 1976" [5], al respecto en su artículo sobre "el valor permanente de la demostración", Gila Hanna [6] afirma en uno de sus apartes que algunos investigadores influenciados por Lakatos "*proclaman que la demostración no es central para la actividad de descubrimiento en la matemática, que la matemática es en cada caso falible y que la demostración es una especie de afrenta autoritaria a los valores sociales modernos y que puede también obstaculizar la actividad de aprendizaje a determinadas personas"*.

El método de refutación heurística que propone Lakatos ha sido según este, la razón de ser del crecimiento en la construcción del conocimiento de la matemática y sus afirmaciones han hecho eco en numerosos especialistas en la didáctica de la matemática que han procurado ponerlas en práctica sin mucho éxito.

En realidad es un hecho que diversas áreas de la matemática deben su crecimiento a estrategias muy diferentes a las propuestas por este autor y no parece plausible la refutación heurística en estas, dada la solidez de sus axiomas y sus construcciones, como puede ser el caso de la teoría de grupos.

Lakatos en su exposición sobre el proceso heurístico critica en forma sistemática el "deductivismo euclídeo" y desestima su papel en la verificación o demostración matemática, ya que dicho deductivismo pretende hacer de la matemática una ciencia de verdades absolutas.

Primero que todo es bueno enfatizar en la importancia que el método euclídeo de demostración ha tenido en el desarrollo de la matemática, la deducción lógica aparece por doquier y serían innumerables los ejemplos en que ha sido aplicada con éxito, inclusive ha sido usado para demostrar las limitaciones del método mismo (Gödel).

Es difícil pensar en las demostraciones formales como la imposición de ideas en forma autoritaria por un grupo de élite que impiden cualquier refutación construyendo una pared infranqueable de notaciones y conceptos extraños. Nada más lejano de la realidad, las demostraciones dejan de ser un producto personal del matemático para convertirse en un bien colectivo que puede ser criticado y controvertido en todos y cada uno de sus apartes por cualquier persona que haga uso de la fuerza de la lógica y la razón. Obviamente para refutar la validez de una demostración es indispensable estar en contexto con el problema que se aborda y hablar un mismo lenguaje, en este caso el "lenguaje matemático".

Greeno (1994) [7] manifiesta su preocupación sobre la tendencia a hacer desaparecer la demostración en las aulas de clase y propone una mayor toma de conciencia del significado epistemológico de la demostración en matemática. De igual forma en su muy personal estilo, lo hace Schoenfeld, una autoridad en la enseñanza de la matemática, contestando a la pregunta: *"¿Tenemos necesidad de la demostración en la didáctica de la matemática?"* responde*: "Absolutamente. ¿Debo decir más? Absolutamente"*.

2.3 Importancia de los teoremas y las demostraciones

Si se preguntará a un grupo de matemáticos en que reside la importancia de un teorema en particular, nos dirían seguramente que el teorema adquiere su valor por una de las siguientes características: Su aplicación a problemas específicos de modelado al mundo real, no importa si su demostración es trivial; la dificultad de su demostración, y los caminos nuevos y potencialidades que se abren en el trayecto de la demostración misma.

A este respecto aún suenan los ecos de la demostración del último teorema de Fermat como uno de los éxitos más grandes de la inteligencia humana, no por el enunciado del teorema en si, ni por la relevancia de lo que se quiere demostrar si no por los intentos, conjeturas previas, desarrollos anteriores que permitieron su demostración, y la confirmación del poder de las herramientas matemáticas usadas. Es más, la demostración presentada con tanta brillantez por Andrew Wiles en 1993 parece ser solo la punta del iceberg, pues como en todo teorema quedan pendientes principios subyacentes a ser descubiertos, ¿qué fue lo que realmente se demostró? ¿Qué verdad matemática se oculta tras este teorema?.

Por otro lado ¿qué importancia tienen las demostraciones en la didáctica de la matemática?

En la discusión de la demostración de un enunciado matemático el alumno debe poner en práctica un correcto lenguaje oral y escrito, debe a la vez ordenar cada una de sus proposiciones de una manera lógica y coherente y debe poder discernir de una manera satisfactoria la diferencia entre una verdad absoluta y una relativa. El desarrollo de estas habilidades será sin duda de gran importancia en su desempeño académico profesional y humano. En adición, tiene la demostración gran influencia en el desarrollo de habilidades fundamentales como el refutar, deducir, inferir y argumentar,

Al respecto, María de Lourdes Bravo et al [8] anotan; “Las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como concretar, abstraer, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar, generalizar; las que se ponen de manifiesto en cada una de las acciones que conforman el desarrollo de la habilidad de demostrar, así como ella vista en su conjunto”.

“Se desarrollan también formas de pensamiento extralógico (pensamiento creativo, pensamiento lateral o divergente, el pensamiento especulativo, el pensamiento heurístico entre otros) que se complementan con las formas de pensamiento lógico deductivo en la solución de problemas y que son una condición sine qua non para el desarrollo del pensamiento matemático”.

De igual forma al proponer caminos de demostración el estudiante descubre sus propias limitaciones y potencialidades, requisito indispensable para una visión crítica de su propio proceso de conocimiento. Al conocer por medio de las demostraciones la razón de ser y la validez de los enunciados hechos en matemáticas y otras ciencias afines como la física, la química, entre otras, el estudiante adquiere la capacidad de identificar con mayor eficiencia los contextos en que son aplicables estas teorías. En carreras de fuerte formación matemática como Ingenierías, puede ser la demostración la diferencia entre un seudo-conocimiento o un conocimiento que el estudiante no puede sustentar o refutar y un conocimiento sólido que le permitirá estar seguro en su desempeño profesional.

Es la demostración la herramienta por excelencia para convencer por la fuerza de la razón sobre la validez de las teorías y afirmaciones científicas. Es en este sentido que el alumno reafirma la confianza en los conocimientos adquiridos, permitiendo categorizar o revaluar si es necesario, preconceptos de tipo intuitivo y también formal.

En lo social, al abordar demostraciones en el aula de clase el estudiante se enfrenta a posiciones diferentes por parte de sus compañeros y del mismo docente y aprende a ser crítico pero también tolerante, a trabajar en grupo y a ser respetuoso frente al colectivo.

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La demostración como elemento en la didáctica de la matemática está estrechamente ligada al desarrollo de habilidades mentales y de pensamiento imprescindibles en la formación integral de los estudiantes.

Dada la gran cantidad de beneficios directos e indirectos en el ejercicio de la demostración en el aula de clase, no podemos como docentes dejar de asumir el reto de su enseñanza. Para esto debemos crear un ambiente propicio, generando interrogantes, proponiendo problemas, lanzando desafíos propios de la matemática y de las demás disciplinas de estudio, motivando a nuestros estudiantes al abordar situaciones problémicas de aplicación en sus respectivas carreras.

La escogencia de las demostraciones que se realizan en clase debe hacerse de manera que el alumno pueda ver sus consecuencias directas y su importancia para el estudio de la matemática y de las otras disciplinas. El alumno debe ser en todo caso sujeto activo en el proceso de la demostración matemática, y en este aspecto el docente aplicará estrategias convenientes basadas en su experiencia e investigaciones existentes sobre el tema.

Por último, no podemos como docentes caer en la rutina de clase (teorema–demostración-corolarios-teorema) puesto que no hay nada más frustrante para un estudiante que una educación que niega sus contextos y sus intereses.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] MULLER, H. Inferencia lógica y demostraciones de la enseñanza de la matemática. Ed Pueblo y Educación. La Habana.

[2] MACIAS DORA A. et al. La enseñanza de la demostración matemática. Facultad de Ciencias exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE.

[3] BLUM. How to prove a theorem so no one else can claim it. Proceedings of the international congress of the mathematicians. 1986.

[4] BABAI, L. Probably true theorems, Cry wolf. Notices of the American Mathematical Society. Vol. 41 No. 5. 1994.

[5] LAKATOS. Proofs and refutations. Cambridge University Press, Cambridge. 1976.

[6] GILA HANNA. The ongoing value of proof. Traducción al español por Victor Larios Osorio.

Dpto de matemáticas del CICFM, Fac. de ingeniería, UAQ. Gutiérrez, A y L. Puig editores. 1999.

[7] GREENO. Coments on Susanna Epp"s Chapter. En A Schoenfeld Editor. Mathematical Thinking and Problem Solving. L. Erlbaum. Hills Dale. 1994.

[8] BRAVO ESTEVEZ, MARIA DE LOURDES et al. El valor formativo de las demostraciones. Instituto superior pedagógico. Conrado Benavides García Cienfuegos. Cuba.