

## TÉCNICAS HÍBRIDAS DE CONTROL APLICADAS AL PENDUBOT

### RESUMEN

En el presente artículo se presentan técnicas especiales de control empleadas para controlar y estabilizar un sistema altamente no lineal como lo es el Péndulo Doble o Pendubot. El control híbrido es implementado cuando la complejidad del sistema hace que una sola técnica convencional de control no tenga los resultados esperados. Métodos como el de linealización parcial por realimentación y la realimentación óptima del estado serán implementados para lograr la estrategia de control.

**PALABRAS CLAVES:** Control no lineal, pendubot, linealización parcial por realimentación, control híbrido.

### ABSTRACT

*This paper shows new special techniques for controlling a nonlinear system or under actuated mechanical system. Hybrid controller for partial feedback linearization and feedback stabilization of the Pendubot are used for swinging up and balancing the system.*

**KEYWORDS:** *Nonlinear control, pendubot, partial feedback linearization, hybrid control.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas físicos no lineales de gran complejidad se caracterizan porque las técnicas de control convencionales son inoperantes cuando se requiere que ellos estén en un punto de operación o posición de equilibrio [6]. Ante esta condición se requiere la implementación de técnicas de control para sistemas no lineales, las cuales permitan manejar el sistema y adaptarse a los cambios en los puntos de equilibrio de la planta.

Actualmente el laboratorio de investigaciones en control del programa de ingeniería eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira cuenta con el kit de control modelo M-1 desarrollado por *Mechatronic Systems, Inc.* como el que se muestra en la figura 1.

Dicho sistema permite construir varios modelos físicos como son: la rueda de reacción (*the reaction Wheel*), el péndulo doble (pendubot) y el péndulo de furuta [1] y permite la ejecución de algoritmos de control en tiempo real.

Dado este sistema físico se pretende diseñar e implementar un algoritmo de control, que se ejecute en tiempo real, el cual permita llevar y mantener en la posición de equilibrio los dos péndulos acoplados. Para ello se emplean dos estrategias de control. Una de ellas que permita llevar los dos péndulos a la posición deseada y la otra que permita estabilizar o balancear este en la posición de equilibrio [7].

### DIDIER GIRALDO BUITRAGO

Ingeniero Electricista, MEE  
Profesor Titular  
Universidad Tecnológica de Pereira  
dgirald@utp.edu.co

### GERMÁN ANDRÉS HOLGUÍN

Ingeniero Electricista, Ms.C  
Profesor Asistente  
Universidad Tecnológica de Pereira  
gahol@utp.edu.co

### ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA

Ingeniero Electricista, Ms.C  
Profesor Catedrático  
Universidad Tecnológica de Pereira  
andreses1@utp.edu.co

**Grupo de Investigación en  
Control e Instrumentación.  
Ingeniería Eléctrica**



Figura 1. Plataforma para el desarrollo del control

La aplicación de los algoritmos de identificación y de control del sistema serán empleados en la plataforma descrita en [1].

## 2. DINÁMICA DEL SISTEMA NO LINEAL

### 2.1 Descripción del Modelo.

Al sistema físico que tiene dos barras acopladas en un punto en común y al cual se le aplica un torque en uno de sus extremos por medio de un motor de DC, se le denomina pendubot y es el que se muestra en la figura 2.

Las variables y parámetros que describen el sistema físico son:

- $\tau_1$  Torque aplicado en el origen de coordenadas.  
 $q_1$  Ángulo que hace la barra uno con el eje de referencia x.  
 $q_2$  Ángulo que hace la barra dos con respecto al eje de la barra uno.  
 $m_1$  Masa de la barra uno.  
 $m_2$  Masa de la barra dos.  
 $l_1$  Longitud de la barra uno.  
 $l_{c1}$  Distancia al centroide de la barra uno.  
 $I_1$  Momento de inercia de la barra uno con respecto al origen de coordenadas.  
 $l_2$  Longitud de la barra dos.  
 $l_{c2}$  Distancia al centroide de la barra dos.  
 $I_2$  Momento de inercia de la barra dos con respecto al punto de unión de las barras.  
 $g$  Es la aceleración de la gravedad.

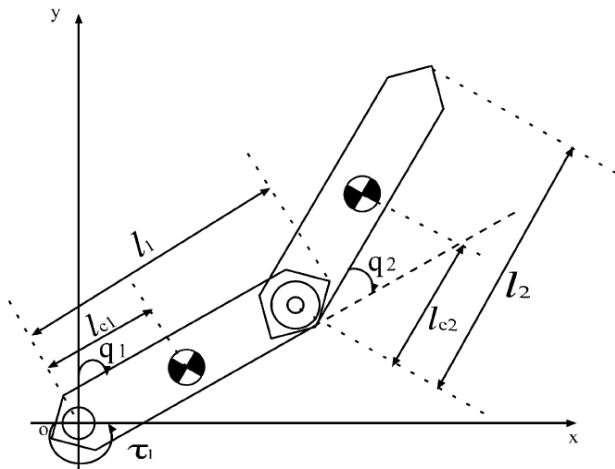


Figura 2. Sistema físico

Con el fin de determinar las ecuaciones de movimiento que rigen el sistema se emplea la metodología de Lagrange planteada en [2], las cuales son deducidas a partir de la energía cinética y potencial del sistema. En forma matricial se tiene que:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (1)$$

En donde el vector  $\tau = [\tau_1 \quad 0]^T$  es el vector de torques que es aplicado en los pivotes y  $q = [q_1 \quad q_2]^T$  es el vector que contiene las posiciones angulares de los

pivotes con respecto a una referencia. Nótese que la segunda componente del vector de torque es igual a cero y es debido a que la unión entre la barra uno y dos gira libremente sin que se le aplique ninguna señal externa.

Las matrices  $D(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$ , son cuadradas y dependen de los parámetros del sistema [3].

Para reducir el número de variables que se desean estimar de la planta se realiza una reparametrización como la que se plantea en [4]. Se definen entonces las siguientes cinco variables:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 &= m_2 l_{c2} \end{aligned} \quad (2)$$

Las ecuaciones planteadas en (2) permiten definir las matrices de la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D(q) &= \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 - \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ g(q) &= \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Ahora si se invierte la matriz  $D(q)$ , las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = D(q)^{-1} \tau - D(q)^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} - D(q)^{-1} g(q) \quad (4)$$

El vector de estados de la ecuación (4) corresponde a las posiciones angulares de cada una de las barras con respecto a cada una de las referencias y sus respectivas velocidades angulares.

Estos parámetros dependen de los definidos en la ecuación (2) y deben ser calculados mediante un algoritmo de identificación.

## 2.2 Identificación del Sistema

Con el fin de determinar las variables de estado del sistema sin necesidad de conocer las características constructivas del sistema físico, se emplea un algoritmo

de identificación en línea el cual emplea el teorema de la energía (ver [4] y [5]) para establecer los parámetros del sistema.

La energía cinética del Pendubot se define por:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q} D(q) \dot{q} \quad (5)$$

Y la energía potencial se define por:

$$U = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin q_1 + m_2 l_{c2} g \sin (q_1 + q_2) \quad (6)$$

Ahora bien la energía total del sistema está dada por:

$$L_i(t_i) = K(t_i) + U(t_i) \quad (7)$$

De donde se puede establecer que la variación en el cambio de la energía total del sistema para dos instantes de tiempo es:

$$L(t_2) - L(t_1) = DL^T \theta \quad (8)$$

Por lo tanto se realiza un algoritmo como el descrito en [6], el cual permite calcular en línea los parámetros de la planta y de esa manera establecer los nuevos parámetros planteados en la ecuación (2). Los resultados permitirán calcular las variables de estado del sistema para cada punto de operación de la planta.

### 2.3 Posiciones de equilibrio

Para el Pendubot mostrado en la figura 2 existen una posición estable de equilibrio y dos posiciones inestables de equilibrio. La posición de equilibrio es el estado del sistema inicial para el cual no se debe ejercer ningún torque sobre el pivote de los péndulos, por lo tanto el sistema esta en reposo y  $q_1 = -\frac{\pi}{2}$  y  $q_2 = 0$ .

Las posiciones inestables de equilibrio del sistema se conocen como *mid position* y se presenta cuando

$q_1 = -\frac{\pi}{2}$  y  $q_2 = \pi$  y *top position* la cual se presenta

cuando  $q_1 = +\frac{\pi}{2}$  y  $q_2 = 0$ .

Para cada una de las posiciones inestables se desarrolla una estrategia de control la cual permita llevar el sistema a la posición deseada.

## 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El objetivo del controlador es el de llevar los dos péndulos de la posición de equilibrio estable a una posición de equilibrio inestable en donde el sistema se balancea.

La estrategia de control se divide en dos partes. La primera de ellas emplea un controlador que se encarga de llevar las dos barras cerca de la posición deseada mediante la oscilación de la barra uno (*swing up*) [5] y se desarrolla aplicando el método de Linealización Parcial por Realimentación [6], la segunda estrategia mantiene estable el sistema en la posición de equilibrio (*balancing*) empleando una técnica lineal para la realimentación óptima del estado del sistema calculado en la ecuación (2).

Cada una de las estrategias se definen a continuación.

### 3.1 Swing Up Control

Las ecuaciones del movimiento que se plantearon en (4) son no lineales y describen por completo la dinámica del sistema. Debido a que la barra dos es independiente del punto en donde se aplica la acción de control (inactiva), solo se puede linealizar el grado de libertad activo del sistema (barra uno) [7]. El método de linealización mas adecuado para desarrollar este controlador es el de Linealización Parcial por Realimentación planteado en [6] y [8]. Se tiene entonces que:

$$v_1 = \ddot{q}_1^d + K_d (\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + K_p (q_1^d - q_1) \quad (9)$$

En donde  $q_1$  representa la posición angular de la barra dos y  $q_1^d$  es la posición en la cual se quiere ubicar el sistema. Los parámetros  $K_p$  y  $K_d$  son ganancias que se deben sintonizar para la generación de la trayectoria.

Nótese como para generar la señal de control no se requiere la posición angular de la barra dos, sin embargo el algoritmo de linealización requiere este parámetro.

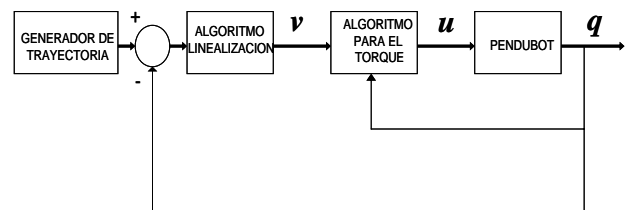


Figura 3. Estructura del controlador

La figura 3 presenta un esquema para esta parte del control.

Para las simulaciones que requieren que el péndulo se desplace a la posición *top*, se emplea un impulso de

magnitud  $q_1^d = +\frac{\pi}{2}$  como trayectoria de referencia. Sin embargo, esta trayectoria es incapaz de llevar el sistema físico real a la posición deseada.

Para superar este inconveniente, se agrega una oscilación (función senoidal de baja frecuencia y amplitud) al sistema en lazo abierto, la cual hace que la barra dos vaya en dirección negativa al movimiento con el fin de que el sistema gane inercia hasta llevarlo a la posición de la trayectoria.

Para lograr que el péndulo vaya a la posición *mid*, se genera la siguiente trayectoria:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1.4 \sin(5t) - \frac{\pi}{2} && \rightarrow t < \frac{2\pi}{5} \\ q_1 &= -\frac{\pi}{2} && \rightarrow t > \frac{2\pi}{5} \end{aligned} \quad (10)$$

El objetivo de generar esta trayectoria es que la energía del sistema aumente hasta que este pueda alcanzar la posición de referencia, es decir se quiere excitar la dinámica cero del sistema [7] lo suficiente para que se alcance la posición deseada.

Es de anotar que las trayectorias generadas y los algoritmos que sirven para llevar los dos péndulos a las posiciones deseadas, funcionan solamente para la primera etapa del controlador. La estrategia de control necesaria para mantener los dos péndulos en equilibrio en dicha posición se presenta a continuación.

### 3.2 Balancing Control

Esta técnica o procedimiento consiste en implementar un controlador que se encargue de mantener estable el pendubot alrededor de una posición de equilibrio. Para ello se diseña un controlador a partir de la linealización del sistema alrededor de los puntos de operación. Con el modelo linealizado se emplea un lazo de realimentación el cual realimenta las variables de estado para cada posición de equilibrio deseada.

Luego de que se obtiene el modelo del pendubot en la ecuación (4), se linealiza este para Las posiciones inestables de equilibrio del sistema, *mid position* cuando

$$q_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ y } q_2 = \pi \text{ y } \textit{top position} \text{ cuando } q_1 = +\frac{\pi}{2} \text{ y } q_2 = 0.$$

Para cada una de las posiciones de equilibrio y representando el modelo resultante en la forma de espacios de estado se tiene que:

Para la posición *mid*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 49.4782 & -5.5038 & 0 & 0 \\ -50.0109 & 6623.36 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -23.9348 & -23.9348 \\ 175.7323 & 175.7323 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y para la posición *top*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 51.9265 & 0 & -13.9704 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -52.8402 & 0 & 68.4210 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15.9549 & 15.9549 \\ 0 & 0 \\ -29.3596 & -29.3596 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez estas matrices están definidas se emplea realimentación óptima de las variables de estado. Para ello se utiliza la técnica LQR definida en [7]. Ello permite obtener un vector de ganancias el cual premultiplica al vector de estados del sistema.

### 3.3 Implementación de las estrategias de control

Con el fin de que el sistema pueda ser controlado por los dos algoritmos diseñados, estos deben actuar en determinados momentos según sean las posiciones angulares de las barras.

La implementación de la técnica híbrida de control se representa en la estructura de la figura 4.

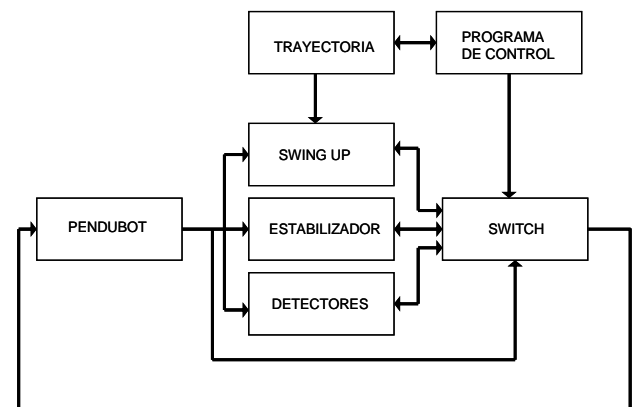


Figura 4. Esquema del sistema de control

El bloque Switch contiene un algoritmo que decide cual de las estrategias de control debe pasar al actuador del

pendubot según sean las posiciones de las barras y las señales de referencia.

Pruebas realizadas sobre el sistema físico lograron establecer que cuando se alcanza la posición de equilibrio, las variaciones angulares con respecto al punto de operación deben ser máximas de 10 grados antes de que el algoritmo decida emplear otra técnica de control.

#### 4. RESULTADOS

Con el fin de establecer la utilidad de la estrategia de control para el sistema físico de los dos péndulos acoplados, se emplea el sistema físico mostrado en la figura 1, el cual permite comunicación con el computador mediante el puerto paralelo.

Para los algoritmos de control se desarrollan varios programas en MATLAB los cuales se basan en los criterios planteados anteriormente. Se emplea también el SIMULINK y una interfaz grafica que permitiera diseñar el controlador y descargarlo al DSP para su aplicación en tiempo real.

La señal de control generada actúa sobre un motor de DC el cual se encuentra acoplado a la barra 1 y se encarga de generar el torque necesario  $\tau_1$  para controlar el sistema.

En la figura 5 se muestra el comportamiento de dos de las cuatro variables de estado del sistema (posiciones angulares de cada una de la barras). Se observa como inicialmente entra en funcionamiento el algoritmo que genera la trayectoria para que la planta oscile hasta alcanzar su referencia (*swing up*), luego cuando el algoritmo determina que se ha llegado a la posición deseada, la estrategia cambia al control que realiza la estabilización o balanceo alrededor del punto de operación (*balancing*).

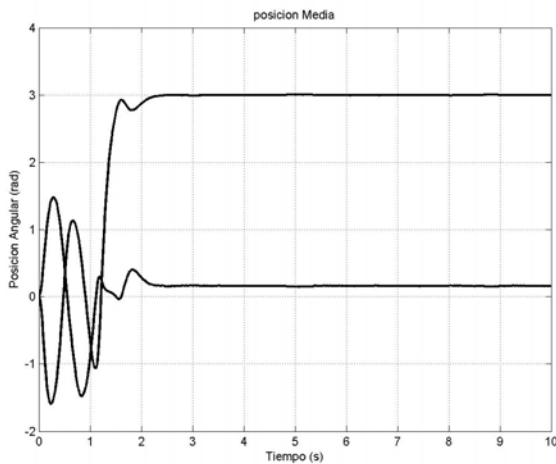


Figura 5. Resultados en la posición MID

Cuando se aplica una perturbación que supera el torque que puede ser aplicado por el motor, la segunda barra del péndulo sale de la zona de operación, esta gira libremente

alrededor de la barra uno hasta que la estrategia de logra ubicarla de nuevo en la posición de equilibrio, este comportamiento se presenta en la figura 6.

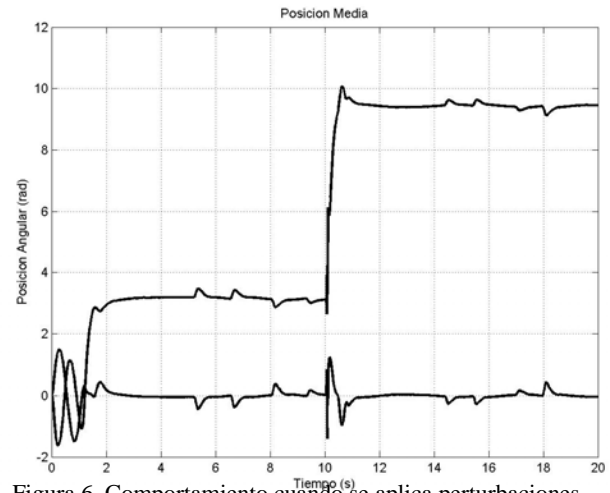


Figura 6. Comportamiento cuando se aplica perturbaciones

En la figura 7 se observa el comportamiento de las barras cuando se desea que estas estén en la posición TOP o completamente vertical. Se observa como en este caso no existe una trayectoria de oscilación para hacer que el sistema vaya a las posiciones deseadas. Sin embargo por la dinámica del sistema físico, existe una oscilación que hace que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición vertical.

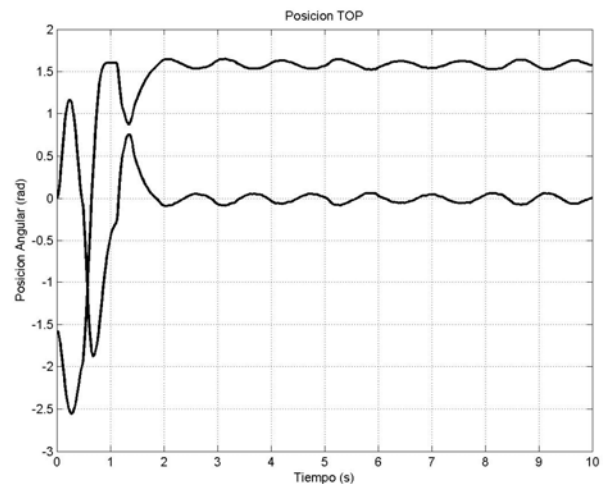


Figura 7. Posición TOP de los dos péndulos

Para cualquier perturbación que se aplique en la segunda barra, el sistema trata de compensarla variando el ángulo de la primera barra en sentido contrario a esta perturbación, figura 8.

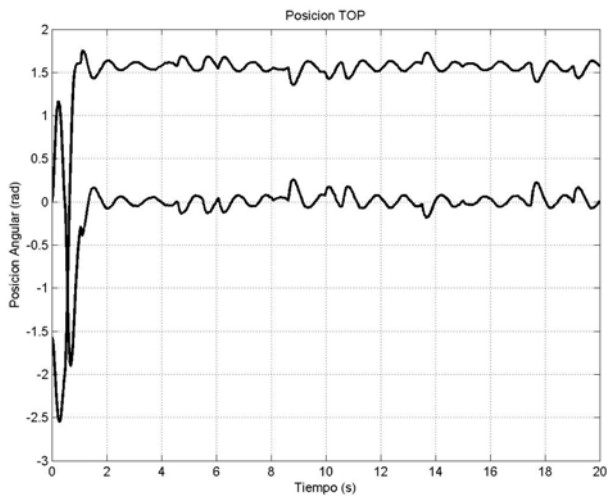


Figura 8. Resultados en la posición TOP con perturbaciones

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se presenta una metodología que permite la caracterización de sistemas físicos empleando criterios de energía. Se presentan antecedentes que muestran porque estos métodos son más adecuados para modelar la dinámica de sistemas no lineales o complejos cuyo comportamiento es imposible de modelar con técnicas convencionales.

El estudio de técnicas híbridas de control son una herramienta útil para el manejo de sistemas no lineales. Estas permiten hacer una descripción del sistema y establecer las regiones de operación del mismo con el fin de tomar una decisión para ejecutar una estrategia de control.

Al realizar las pruebas sobre el sistema físico real, se observó que se debe realizar una oscilación durante unos cuantos segundos, la cual permita al sistema alcanzar la posición deseada. Cuando esto sucedía, la ley de control cambiaba para que el sistema se pudiera balancear en su punto de operación.

Es de anotar que durante las pruebas ninguna de las técnicas de control seleccionadas eran útiles cuando se tenían condiciones iniciales. Ello debido a que las oscilaciones y la complejidad del sistema no coincidían con la oscilación inicial del controlador.

Se deja para desarrollos futuros la aplicación de otras técnicas de control como la lógica difusa [9] y la identificación con redes neuronales para el control de este sistema físico.

Las condiciones iniciales y las perturbaciones que alejan al pendubot de su punto de operación requieren otro manejo especial [8].

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Mechatronics Control Kit Model M-1, User Manual, Champaign, Illinois, USA, 2001.
- [2] KUO Benjamín C., *Sistemas de Control automático*, séptima edición, Prentice Hall, México 1996.
- [3] BLOCK Daniel J, SPONG Mark, Mechanical Design and Control of the Pendubot, Sae Technical Papers series, 46<sup>th</sup> Annual Earthmoving Industry Conference, Illinois, USA, 1995.
- [4] ZHANG Mingjun, TARN Tzyh-Jong, Hybrid Control of the Pendubot, Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automatic, Seoul, Korea, Mayo de 2001
- [5] SPONG M. W., The swing up control problem for the acrobot, IEEE, Contr. Syst. Mag., Vol 15, pp. 49-55, 1995.
- [6] SLOTINE Jean-Jacques, and LI Weiping, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, New Jersey 1991.
- [7] ESCOBAR M. Andrés, Control Óptimo del Pendubot con Técnicas Inteligentes Utilizando un DSP, Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de Pereira, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Diciembre de 2005.
- [8] ZORAN Vukic, Nonlinear Control Systems, Control Engineer Series, Marcel Dekker, inc., New York, 2003.
- [9] WANG Li-Xin, A course in Fuzzy Systems and Control, Prentice Hall, New York 1997.