UNA NOTA SOBRE LOS ESPACIOS $B_{p,k}(X)$ DE ULTRADISTRIBUCIONES

JAIRO VILLEGAS G
Matemático
Doctor en Ciencias Matemáticas
Profesor
Universidad EAFIT, Medellín
javille@eafit.edu.co

RESUMEN
Esta nota es de carácter informativo e histórico, en consecuencia no se hacen desarrollos teóricos. En ella se presentan tanto los espacios de Hörmander-Beurling de ultradistribuciones vectoriales $B_{p,k}(X)$ como los espacios locales $B_{p,k}^{loc}(\Omega, X)$, siendo X un espacio de Banach. También se hace un recuento histórico del desarrollo de estos espacios. Se termina con un comentario sobre sucesiones cortas entre espacios locales de Hörmander-Beurling y mencionando algunas de sus propiedades.

PALABRAS CLAVES: Espacio de Hörmander - Beurling, ultradistribución, espacio local, sucesión corta.

ABSTRACT
This is an informative and historic note; therefore there are no theoric developments. It presents the Hörmander-Beurling spaces of vectorial ultradistributions $B_{p,k}(X)$ *as well as local spaces* $B_{p,k}^{loc}(\Omega, X)$, *where* X *is a Banach space. Also, a historic development of these spaces is recounted. Finally, a remark about short sequences among local Hörmander-Beurling spaces is given, mentioning some of their properties.*

KEYWORDS: *Hörmander – Beurling space, ultradistribution, local space, short sequence.*

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta nota es más informativo e histórico que técnico y como tal no se hacen desarrollos teóricos que abrumen al lector. Se pretende con la nota dar una descripción general sobre ciertos espacios que aparecen en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Espacios como los de Hörmander de los cuales se obtiene información sobre la regularidad de una función de soporte compacto analizando el comportamiento en el infinito de su transformada de Fourier. A raíz de estos estudios se pudo precisar el concepto de solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales, pues la definición clásica[1] no resolvía el problema en general. Por ejemplo, en la ecuación del potencial que aparece en electrostática cuando en el campo solamente existe una carga en un punto x_0 del mismo, entonces la distribución de carga es un múltiplo de la medida de Dirac $f = q\delta_{x_0}$, siendo q una constante. En este caso se tiene la ecuación $-\Delta u = q\delta_{x_0}$, donde

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

es el Laplaciano de u.

¿Qué se entiende por solución en esta ecuación? La respuesta no es posible en términos de derivadas clásicas. Esto muestra que la cuestión que antes se planteaba no queda resuelta con la definición clásica. La solución a dicho problema dió origen a la teoría de distribuciones, desarrollada por L. Schwartz. En la actualidad, las distribuciones juegan un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, siendo habitual probar la existencia de soluciones en el sentido de distribuciones, estudiando a posteriori las propiedades de regularidad de estas soluciones, en particular su grado de derivabilidad y/o sus puntos de singularidad.

2. NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA

A continuación se da alguna terminología y notación que se utilizará más adelante. Un tratamiento bastante exhaustivo sobre la teoría de ultradistribuciones de Beurling se puede encontrar en Beurling [1] o en Björck [2].
Sea M el conjunto de todas las funciones reales continuas $\omega(x)$ sobre $\mathbb{R}^n$ tales que $\omega(x) = \sigma(|x|)$ ($|\cdot|$ es la norma euclídea) donde $\sigma(t)$ es una función cóncava, continua y creciente sobre $[0,\infty)$ con las siguientes propiedades: (i)

[1] Una función u es solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales $F(x,u,\partial_{x_1}u,\ldots,\partial_{x_n}u,\ldots,\partial_{x_1}^2 u,\ldots,\partial_{x_n}^k u) = 0$ (*) en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ si u es k veces derivable y satisface la relación (*) en cada punto $x \in \Omega$.

Fecha de Recepción: 11 Octubre de 2005
Fecha de Aceptación: 12 Abril de 2006

$\sigma(0)=0$, (ii) $\int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{1+t^2}\,dt<\infty$ (condición de Beurling), (iii) existe un número real a y un número $b>0$ tales que $\sigma(t)\geq a+b\ln(1+t)$ para $t\geq 0$. Dos de los ejemplos más importantes de funciones de M son $\omega(x)=\ln(1+|x|)^d$ con $d>0$ y $\omega(x)=|x|^\beta$ con $0<\beta<1$.

Si $\omega\in M$ entonces K_ω es el conjunto de todas las funciones positivas k sobre IR^n para la que existe una constante $\lambda>0$ tal que $k(x+y)\leq e^{\lambda\,\omega(x)}k(y)$ para todo $x,y\in\mathrm{IR}^n$ (ver [2]).

Sea $\omega\in M$. Denotamos por D_ω el conjunto de todas las funciones $\varphi\in L_1(\mathrm{IR}^n)$, con soporte compacto, tales que $\|\varphi\|_\lambda := \int_{\mathrm{IR}^n}|\hat\varphi(x)|e^{\lambda\,\omega(x)}dx<\infty, \quad \forall\lambda>0,$ donde $\hat\varphi(x)$ es la transformada de Fourier de φ. Si $\omega(x)=\ln(1+|x|)$ entonces $D_\omega=C_0^\infty(\mathrm{IR}^n)=D$ (el espacio de las funciones test de Schwartz). Si $\Omega\subset\mathrm{IR}^n$, entonces $D_\omega(\Omega):=\{\varphi\in D_\omega : \operatorname{sop}\varphi\subset\Omega\}$. Si Q es un compacto de IR^n entonces $D_\omega(Q)$, equipado con la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\lambda : \lambda>0\}$, es un espacio de Fréchet ver [2].

Si $\omega\in M$, S_ω es el conjunto de todas las funciones $\varphi\in L_1(\mathrm{IR}^n)$ tales que φ y $\hat\varphi$ son indefinidamente diferenciables sobre IR^n con

$$p_{\alpha,\lambda}(\varphi):=\sup_{x\in\mathrm{IR}^n} e^{\lambda\,\omega(x)}\left|\partial^\alpha\varphi(x)\right|<\infty \text{ y}$$

$$q_{\alpha,\lambda}(\varphi):=\sup_{x\in\mathrm{IR}^n} e^{\lambda\,\omega(x)}\left|\partial^\alpha\hat\varphi(x)\right|<\infty,$$

para todo multiíndice α $(=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, cada α_j es un entero no negativo y $|\alpha|=\sum_{j=1}^n\alpha_j$ es el orden de α) y todo $\lambda>0$. S_ω con la topología generada por las seminormas $p_{\alpha,\lambda}$, $q_{\alpha,\lambda}$ ($\alpha\in\mathrm{IN}_0^n,\forall\lambda>0$), es un espacio de Fréchet y la transformada de Fourier es un automorfismo topológico de S_ω (ver [2]). Si $\omega(x)=\ln(1+|x|)$ entonces S_ω coincide con el espacio S de las funciones de decrecimiento rápido de Schwartz.

Sea $\omega\in M$. Si Ω es un abierto de IR^n, una forma lineal y continua u sobre $D_\omega(\Omega)$ (es decir, una forma lineal sobre $D_\omega(\Omega)$ tal que para cada compacto Q de Ω existe un $\lambda>0$ y una constante C positiva tales que

$$\left|\langle\varphi,u\rangle\right|\leq C\|\varphi\|_\lambda,\quad \forall\varphi\in D_\omega(Q),$$

Acá usamos la notación usual $\langle u,\varphi\rangle$ en lugar de $u(\varphi)$)

Se dice que es una ultradistribución (de Beurling) sobre Ω. Denotamos por $D'_\omega(\Omega)$ el espacio de todas las ultradistribuciones sobre Ω equipado con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de $D_\omega(\Omega)$. Una forma lineal y continua sobre S_ω se dice que es una ultradistribución temperada (de Beurling). S'_ω denota el espacio de todas las ultradistribuciones temperadas provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de S_ω. Si $u\in S'_\omega$ se define la transformada de Fourier $\hat u\in S'_\omega$ mediante la fórmula $\langle\varphi,\hat u\rangle:=\langle\hat\varphi,u\rangle$, $\varphi\in S_\omega$. La transformada de Fourier también es un automorfismo topológico de S'_ω.

Si $\omega\in M$, $k\in K_\omega$ y $1\leq p\leq\infty$ se puede identificar $f\in L_{p,k}(\mathrm{IR}^n)(=L_{p,k})$ con la ultradistribución temperada

$$\varphi\mapsto\langle\varphi,f\rangle:=\int_{\mathrm{IR}^n}\varphi(x)\,f(x)dx.$$

3. UN POCO DE HISTORIA

A comienzos de los años 1950 L. Schwartz planteó el problema de determinar cuando un operador diferencial parcial $P(D)$ [2] admite una inversa por la derecha lineal y continua, es decir, bajo que condiciones existe una aplicación lineal y continua $R:E(\Omega)\to E(\Omega)$ ($E(\Omega)$ es el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables en Ω) o $R:D'(\Omega)\to D'(\Omega)$ tal que $P(D)\circ R$ sea igual a la identidad. Por ejemplo, cuando $\Omega=\mathrm{IR}^n$ y $P(D)$ es hiperbólico en alguna dirección podemos tomar como $R(f)$ la única solución del problema de Cauchy $P(D)u=f$ con datos iniciales cero (ver, p.e., [7]). Para $n\geq 2$ Grothendieck demostró (ver, p.e., [12] Teorema 52.4) que ningún operador elíptico puede tener una inversa por la derecha lineal y continua sobre $E(\Omega)$. Cohoon ([4]) demostró lo mismo para operadores parabólicos y otros operadores diferenciales. Vogt ([16]) extendió el resultado a la clase de los operadores hipoelípticos (ver nota 4 de pie de página para la definición). En 1990 el problema de Schwartz fue completamente resuelto por Meise-Taylor-Vogt ([9]). Los mismos autores resolvieron el problema en 1996 para

---

[2] $P(D)=\sum_{|\alpha|\leq m}c_\alpha(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ es el operador diferencial parcial cuyo polinomio asociado en IR^n es $P(x)=\sum_{|\alpha|\leq m}c_\alpha x^\alpha$. A cada multiíndice α se le asocia el operador diferencial $\partial^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

clases no-cuasianalíticas de tipo Beurling y de tipo Roumieu ([10]).

En el periodo 1955-60, en sus investigaciones sobre soluciones fundamentales de operadores diferenciales y sobre la regularidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Malgrange ([8]) y Hörmander ([6]), introdujeron los espacios de distribuciones temperadas u tales que $k\hat{u} \in L_p(\mathbb{R}^n)$ para ciertos pesos k. Espacios de esa forma aparecieron previamente en la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elíptico en el caso $p = 2$ y $k(x) = (1 + |x|^2)^{s/2}$. En su celebre monografía de 1963 Hörmander (ver [7]) estudiaba en profundidad las propiedades de esos espacios de distribuciones suponiendo que el peso k satisfacía la condición $k(x+y) \le (1+|x|)^N k(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, C y N constantes positivas. Los correspondientes espacios se denotaban allí por $B_{p,k}$ y definidos por $B_{p,k} := \{u \in S' : k\,\hat{u} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$. Esos espacios se conocen desde entonces como espacios de Hörmander.

En la conferencia de Stanford de 1961 Beurling [1] presentó los fundamentos de una teoría más general que la teoría de distribuciones de Schwartz. Dicha teoría fue desarrollada por Björck en 1966. En la teoría de Beurling-Björck el peso $x \mapsto \ln(1+|x|)$ se reemplaza por otra función subaditiva $\omega(x)$ (verificando en casos importantes la desigualdad $\omega(x) \ge a + b\ln(1+|x|)$ con $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$), de manera que el espacio de funciones test

$$D_\omega(\Omega) := \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n) : \text{sop}\varphi \text{ compacto contenido en} \\ \Omega \text{ y } \hat{\varphi}(\xi)e^{m\omega(\xi)} \text{ integrable } \forall m \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

es más pequeño que $D(\Omega)$ y, por tanto, la clase de (ultra-)distribuciones es mayor que la considerada por Schwartz, es decir, $D'_\omega(\Omega) \supset D'(\Omega)$. Björck, usando ultradistribuciones de Beurling, estudia cuestiones de existencia, aproximación y regularidad interior de soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, lineales con coeficientes constantes, en espacios más generales que los de Hörmander (ver [2]). A esos espacios se les llama “espacios de Hörmander-Beurling”. En Schmeisser y Triebel ([11]) se obtienen nuevas desigualdades del tipo Plancherel-Polya-Nikol'skij y estudian la estructura de diferentes espacios pesados utilizando ultradistribuciones de Beurling. En el trabajo de Braun, Meise y Taylor ([9]) reemplazan la subaditividad del peso $\omega(x)$ por una condición más débil obteniendo una teoría de ultradistribuciones muy potente y versátil.

4. LOS ESPACIOS $B_{p,k}(X)$

Como se advirtió en líneas anteriores, los espacios de Hörmander $B_{p,k}$ juegan un papel importante en la teoría de los operadores diferenciales parciales lineales. A continuación se definen los espacios de Hörmander-Beurling $B_{p,k}(X)$. En lo que sigue de esta sección $\omega \in M$, $k \in K_\omega$ y X es un espacio de Banach (ver [13], [14], [15]).

Definición 1. Sea $\omega \in M$, $k \in K_\omega$, $1 \le p \le \infty$ y X un espacio de Banach. Se denota por $B_{p,k}(X)$ el conjunto de todas las ultradistribuciones vectoriales $T \in S'_\omega(X)$ para las que existe alguna función $f \in L_{p,k}(X)$ tales que

$$\langle \varphi, \hat{T} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, f(x)dx,\ \forall u \in S_\omega .$$

$B_{p,k}(X)$ provisto de la norma

$$\|T\|_{p,k} := \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x)\hat{T}(x) \right\|_E^p dx \right)^{1/p},\quad p < \infty,$$

es un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $L_p(X)$. Los espacios $B_{p,k}(X)$ se llaman espacios de Hörmander-Beurling con valores en X. Si $p = \infty$ se tiene $\|T\|_{\infty,k} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| k(x)\hat{T}(x) \right\|_E$ (supremo esencial).

Observación. Si X es un espacio de Banach y $1 \le p \le \infty$, $L_p(X)$ denota el conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones medibles Bochner f de $\mathbb{R}^n$ en X, tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} < \infty .$$

(Si $p = \infty$ se supone $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E < \infty$, el supremo esencial). De igual manera, $L_{p,k}(X)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles Bochner f de $\mathbb{R}^n$ en X, tales que $kf \in L_p(X)$. Finalmente, $S'_\omega(X)$ denota el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de S_ω en X. Dichas aplicaciones se llaman ultradistribuciones ω-temperadas. Si $T \in S'_\omega(X)$ se define la transformada de Fourier $\hat{T} \in S'_\omega(X)$ por

$\langle u,\hat{T}\rangle = \langle \hat{u},T\rangle,\quad \forall u \in S_\omega$. Es un automorfismo topológico de $S'_\omega(X)$.

Es de notar que el estudio de los espacios $B_{p,k}(X)$ no se reduce al estudio de los espacios $B_{p,k}\hat{\otimes}_\varepsilon X$ puesto que $L_p(X)$ y $L_p\hat{\otimes}_\varepsilon X$ no son isomorfos en general. Por ejemplo, el espacio $L_1(\ell_p)$ no es isomorfo a $L_1\hat{\otimes}_\varepsilon \ell_p$ si $2 \le p < \infty$ (ver [5], p.117 y Corolario p.258). De igual manera, si $\dim X = \infty$ y $1 < p < \infty$ entonces $L_p(X)$ no es isomorfo a $L_p\hat{\otimes}_\varepsilon X$ (ver nuevamente [5], p.253).

Otro tipo de espacio de Hörmander que Björck generaliza a ultradistribuciones escalares son los espacios locales

$$B^{loc}_{p,k}(\Omega) := \{u \in D'(\Omega) : \varphi u \in B_{p,k},\ \forall \varphi \in D(\Omega)\},$$

Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, este subespacio de $D'(\Omega)$ tiene la característica que sus elementos se comportan localmente como los elementos de $B_{p,k}$ pero cuyo crecimiento en la frontera y en el infinito no está restringido. En la siguiente definición se generaliza el espacio local $B^{loc}_{p,k}(\Omega)$ al caso de ultradistribuciones vectoriales.

Definición 2. Sea $\omega \in M$, $k \in K_\omega$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ y X un espacio de Banach. Se denota por $B^{loc}_{p,k}(\Omega, X)$ el conjunto de todas las ultradistribuciones vectoriales $T \in D'_\omega(\Omega, X)$ tales que, para cada $\varphi \in D_\omega(\Omega)$, la aplicación $\varphi T : S_\omega \to X$ definida por $\langle u, \varphi T\rangle = \langle \varphi u, T\rangle,\ u \in S_\omega$, está en $B_{p,k}(X)$. El espacio $B^{loc}_{p,k}(\Omega, X)$ se equipa de la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{p,k,\varphi} : \varphi \in D_\omega(\Omega)\}$ donde $\|T\|_{p,k,\varphi} := \|\varphi T\|_{p,k}$ para $T \in B^{loc}_{p,k}(\Omega, X)$. Esta topología es metrizable (ver [15]).

Otro hecho interesante de estos espacios es el siguiente: Si el espacio de Banach X es isomorfo a un subespacio complementado[3] del espacio de Banach Y, entonces $B^{loc}_{p,k}(\Omega, X)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $B^{loc}_{p,k}(\Omega, Y)$.

Para terminar es bueno comentar que utilizando los resultados mencionados de Grothendieck, de Vogt y de Meise-Taylor-Vogt, se pueden estudiar propiedades de sucesiones cortas entre espacios de Hörmander-Beurling de la forma

$$0 \to (P(D)) \to B^{loc}_{p,kP'}(\Omega) \to B^{loc}_{p,k}(\Omega) \to 0 .$$

Por ejemplo, si Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 2$), $\omega \in M$, $k \in K_\omega$, $P'(x) = \left(\sum_{|\alpha|\ge 0} \left|\partial^\alpha P(x)\right|^2\right)^{1/2}$ y $P(D)$ un operador elíptico[4] entonces la sucesión corta

$$0 \to (P(D)) \to B^{loc}_{2,kP'}(\Omega) \xrightarrow{P(D)} B^{loc}_{2,k}(\Omega) \to 0$$

es exacta[5] en virtud del Corolario 3.7.1 de Hörmander ([7]) y el Teorema 3.3.3 de Björck ([2]). En esta sucesión el espacio $N(P(D))$ coincide algebraica y topológicamente con el espacio $N(\Omega) = \{f \in E_\omega(\Omega) : P(D)f = 0\}$ de $E_\omega(\Omega)$ ($E_\omega(\Omega)$ es espacio de las funciones ultradiferenciables en Ω) para ello se utiliza el Corolario 4.1.4, el Teorema 4.1.1 de Björck ([2]) y el teorema de la gráfica cerrada. Además la sucesión no se parte, es decir, $P(D)$ no admite inversa por la derecha lineal y continua.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] Beurling, A. Quasi-analyticity and general distributions. *Lectures* **4** *and* **5**. A.M.S. Summer institute, Stanford. (mimeographed) (1961).

[3] Sea Y un subespacio cerrado de un espacio vectorial topológico X. Y es un subespacio complementado en X si existe un subespacio cerrado Z de X tal que $X = Y \oplus Z$ (X es suma directa de Y y Z). Si X es un espacio de Fréchet, el subespacio cerrado Y de X está complementado si y sólo si existe una aplicación lineal y continua $P : X \to X$ tal que $P^2 = P \circ P = P$ y $\operatorname{Im} P = Y$, es decir, P es una proyección continua.

[4] El operador $P(D)$ se llama elíptico si $P_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha = 0$ entonces $x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. El operador se llama hipoelíptico si para cada $A > 0$, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $P(z) = 0$ implica $|y| \ge A\ln(1+|x|) - B$, $z = x + iy$.

[5] La sucesión corta de espacios de Fréchet E, F y G $0 \to E \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{q} G \to 0$ es exacta si $\operatorname{Im}\iota = \ker q$ y además ι y q son aplicaciones lineales y continuas, ι inyectiva y q sobreyectiva.

[2] Björck, G. Linear partial differential operators and generalized distributions, *Ark. Mat*. **6**, 351-407 (1966).

[3] Braun, R.W., Meise, R., Taylor, B.A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. *Result. Math.* **17**, 206-237 (1990).

[4] Cohoon, D. K. Nonexistence of a continuous right inverse for parabolic differential operators. *J. Diff. Equ.* **6**, 503-511 (1969).

[5] Diestel, J. and Uhl Jr., J. J. Vector Measures. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island (1977).

[6] Hörmander LOn the theory of general partial differential operators. *Acta Math*. **94**, 161-248 (1955).

[7] Hörmander L. Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York (1963).

[8] Malgrange, B. Sur une classe d´opérateurs différentiels hypoelliptiques. *Bull. Soc. Math France*. **85**, 283-306 (1957).

[9] Meise, R., Taylor, B. A., Vogt, D. Characterization of the linear partial differential operators with constant coeficients that admit a continuous linear right inverse}. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble. **40**, 619-655 (1990).

[10] Meise, R., Taylor, B. A., Vogt, D. Continuous linear right inverses for partial differential operators on non-quasianalytic classes and on ultradistributions. *Math. Nach*. **180**, 213-242 (1996).

[11] Schmeisser, H.I, Triebel, H. Topics in Fourier Analysis and Function Spaces, John Wiley \& Sons (1987).

[12] Trèves, F. Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels.Academic Press, Inc., New York (1967).

[13] Villegas, J. On vector-valued Hörmander-Beurling spaces. *Extrac. Math.* **18**, No. 1, 91-106 (2003).

[14] Villegas, J. Los espacios de Hörmander $B_{p,k}(E)$. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria,* Vol. XI No. 1,2 Revista de la Escuela Regional de Matemáticas, 21-32 (2003).

[15] Villegas, J. On Local Hörmander-Beurling Spaces. *Turk J Math.,* **28** No. 4, 387-397 (2004).

[16] Vogt, D. On the solvability of $P(D)f = g$ for vector-valued functions. *RIMS Kokyoroku* **508**, 168-182 (1983).