

## PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA APLICADA AL PROBLEMA DEL DESPACHO HIDROTÉRMICO

### RESUMEN

Este artículo presenta las generalidades de un sistema hidrotérmico de generación de energía y la manera como la programación dinámica estocástica es utilizada para obtener la política operativa que minimiza los costos de operación de un sistema conformado por plantas térmicas e hidráulicas.

**PALABRAS CLAVES:** Sistema Hidrotérmico, Programación Dinámica Estocástica, Política Operativa, Sistema Reducido.

### ABSTRACT

*This Paper presents the generalities of a Hydrothermal system of energy generation and the way like the stochastic dynamic programming is used to obtain the operative politics that minimizes the costs of operation of a system formed by thermoelectric a hydroelectric energy generations.*

**KEYWORDS:** Hydrothermal System, Stochastic Dynamic Programming, Operative Politics, Reduced System.

### 1. INTRODUCCIÓN

El sistema de generación de energía eléctrica Colombiano posee varias centrales hidroeléctricas (66%) y térmicas (34%). El objetivo común de estos dos tipos de centrales es generar energía eléctrica; para ello, las centrales hidroeléctricas utilizan agua, el cual es un recurso abundante en el país, mientras que las centrales termoeléctricas usan combustible de origen fósil, u orgánico, entre otros, y aunque también son abundantes, se deben pagar precios elevados por ellos.

El problema del Despacho Hidrotérmico consiste en determinar la manera cómo se deben operar las centrales, lo que se denomina la política de operación, a lo largo de cierto horizonte, tal que los costos de generación de energía eléctrica del sistema sean mínimos.

Este artículo hace referencia al trabajo de grado "Solución al problema del Despacho Hidrotérmico de dos plantas mediante Programación Dinámica Estocástica"[3], el cual expone la teoría de la programación dinámica y la programación dinámica estocástica, dando además, ejemplos de aplicación de estas herramientas para hallar una solución del problema del despacho hidrotérmico de un sistema eléctrico de prueba.

### 2. CONCEPTOS GENERALES

En un sistema de generación de Energía eléctrica como el Colombiano existen principalmente dos tipos de plantas o centrales generadoras que son: **Las Centrales Hidroeléctricas**, las cuales utilizan la energía potencial del agua almacenada en un embalse para producir energía

### JUAN CARLOS BEDOYA

Estudiante de X semestre de Ingeniería Eléctrica.

Universidad Tecnológica de Pereira  
bedoya@ohm.utp.edu.co

### MAURICIO BARRERA REBELLON

Estudiante de X semestre de Ingeniería Industrial.

Universidad Tecnológica de Pereira  
vonneuman@hotmail.co

eléctrica; y **Las Centrales Termoeléctricas**, que utilizan la energía resultante de la combustión de algún tipo de combustible para producir energía eléctrica.

Las Hidroeléctricas pueden generar energía a bajo costo debido a que el recurso que utilizan es el agua; por el contrario las termoeléctricas generan a costos superiores debido al consumo de combustibles, a los cuales se asocian precios altos.

La Operación de un embalse consiste en turbinar<sup>1</sup> agua para producir energía eléctrica.

El despacho hidrotérmico (DH) consiste en la obtención de la política de operación más óptima para los embalses, a determinado plazo, considerando las restricciones del sistema de generación, del sistema de transmisión y además las incertidumbres en las afluencias<sup>2</sup> futuras a los embalses.

Debido a la estructura temporal del problema del despacho hidrotérmico, se puede caracterizar como un problema dinámico (cambia en el tiempo); y las variables inciertas del problema hacen que este sea un problema de carácter estocástico.

El análisis del despacho hidrotérmico puede ser de corto (diario), mediano (mensual) y largo plazo (Anual).

<sup>1</sup> El volumen de agua turbinada es la cantidad de agua por unidad de tiempo que sale del embalse y se utiliza para generar energía eléctrica.

<sup>2</sup> El volumen de agua que abastece el embalse en un periodo determinado se llama afluencia.

## 2.1 GENERALIDADES DE LAS CENTRALES DE GENERACIÓN Y COSTO DEL AGUA.

En las centrales térmicas, el costo de generación de energía eléctrica está totalmente asociado al consumo y costo del combustible. A mayor cantidad de energía eléctrica que se deba generar, mayor será la demanda de combustible.

La operación de una central termoeléctrica es un problema desacoplado en el tiempo, es decir, la decisión de generar cierta cantidad de energía eléctrica en el presente no afectará una posible operación futura de la central. El costo de operación sólo depende de la cantidad de energía que se deba generar.

Por el contrario, en la operación de un sistema hidroeléctrico existe una dependencia fuerte con la variable tiempo, debido al carácter temporal de las afluencias a los embalses ya que la decisión de desembalsar o no agua en un periodo afecta las decisiones relacionadas con el uso de este recurso en periodos posteriores.

En un sistema hidrotérmico (formado por plantas térmicas e hidráulicas) existe también una dependencia temporal (producido por las plantas hidráulicas). A raíz de la combinación de estos dos tipos de plantas en la generación eléctrica, surge entonces un nuevo concepto: El Costo del Agua.

Para el manejo de los embalses del sistema hidrotérmico, en el presente, se tienen dos políticas operativas que son:

- **Utilizar los embalses:** Esta decisión, da origen a dos posibles escenarios futuros que dependen de las afluencias futuras y que son:
  - *Poca Afluencia Futura (Tiempo seco):* Dado que se ha usado el agua de los embalses (generación a bajo costo), y las afluencias son pocas, la situación futura del embalse será crítica ya que éste estará en niveles muy bajos y posiblemente no se pueda generar por medios hídricos haciéndose necesario incluir demasiada generación térmica (generación costosa) para satisfacer la demanda. En consecuencia los costos operativos serán *bajos* en el presente y *altos* en el futuro.
  - *Mucha Afluencia Futura (Tiempo húmedo):* Dado que se ha usado el agua de los embalses (generación a bajo costo), y la afluencia es bastante, la situación futura es buena ya que se puede seguir generando energía por medios hídricos (generación a bajo costo).
- **No utilizar los embalses:** No usarlos implicará satisfacer la demanda con generación térmica (generación costosa). Esta decisión da origen a dos posibles escenarios futuros:

- *Poca Afluencia Futura (Tiempo seco):* Dado que no se ha usado el agua de los embalses, y las afluencias son pocas, la situación futura será favorable ya que los embalses no estarán en niveles críticos y se podrá generar energía eléctrica por medios hidráulicos (generación a bajo costo). En consecuencia los costos operativos del sistema hidrotérmico serán altos en el presente y bajos en el futuro.
- *Mucha Afluencia Futura (Tiempo húmedo):* Dado que no se ha usado el agua de los embalses, y la afluencia es grande, la situación futura será un embalse lleno y se presentarán Vertimientos<sup>3</sup>.

En cuanto a los costos operativos, mencionados anteriormente, podemos representarlos en un gráfico donde se relacionen estos costos en función del nivel de agua almacenada en el embalse para el futuro. Esta función es la **Función de costo Futuro (FCF)** la cual nos ofrece la información de que tan costoso es almacenar agua para un escenario futuro. Esta **FCF** es sin duda de vital importancia para el problema del despacho Hidrotérmico y nos muestra cómo es el costo del agua.

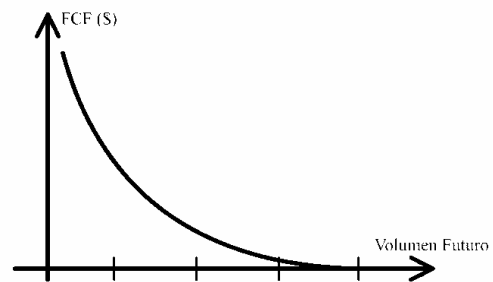


Figura 1. Función de Costo Futuro

## 3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

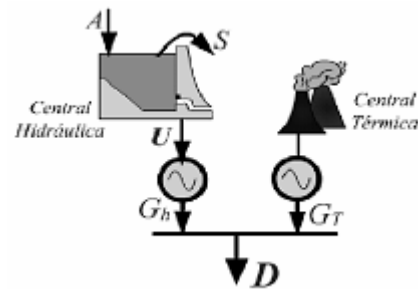


Figura 2. Representación del sistema hidrotérmico en nodo único.

La figura muestra el esquema en nodo único del sistema hidrotérmico que será analizado. El sistema considera que existe una central hidroeléctrica, una central térmica y se

<sup>3</sup> El caudal vertido es el volumen de agua que sale del embalse sin generar energía eléctrica.

asume que toda la demanda **D** está concentrada en un nodo.

- A<sub>i</sub>**: Afluencias totales al embalse durante el periodo **i**.
- V<sub>i</sub>**: Volumen total del embalse al final del periodo **i**.
- U<sub>i</sub>**: Volumen total de agua turbinada en el periodo **i**.
- S<sub>i</sub>**: Volumen total de agua vertida durante el periodo **i**.
- Gh<sub>i</sub>**: Generación de energía hidroeléctrica en el periodo **i**.
- Gt<sub>i</sub>**: Generación de energía Térmica en el periodo **i**
- Cg<sub>i</sub>(Gt<sub>i</sub>)**: Función de Costo de generación Térmica.
- D<sub>i</sub>**: Demanda de energía en el periodo **i**.

**Balance de Energía:** La demanda debe ser igual a la suma de la generación térmica e hidráulica.

$$Gt_i = D_i - Gh_i \quad (1)$$

**Balance Hídrico:** El nivel de agua en el estado **i+1** es igual a la suma del nivel de agua del estado anterior más la afluencia, menos el caudal turbinado, menos el caudal vertido. La ecuación que relaciona las variables es:

$$V_{i+1} = V_i + Y_i - U_i - S_i \quad (2)$$

El costo total de generación para los **n** periodos del despacho será:

$$Costo\ Operativo\ Térmico = \sum_{i=1}^n Ct_i(Gt_i) \quad (3)$$

Esta ecuación muestra que el costo operativo para una central térmica es la suma de los costos de generación de la planta térmica en cada uno de los periodos.

El costo operativo total para un sistema hidrotérmico estará dado por el costo operativo térmico más el costo futuro del agua (dado por la FCF). Remplazando (1) en (3) tenemos:

$$CostoTotal = \sum_{i=1}^n Ct(D_i - Gh_i) + FCF_{n+1}(V_{n+1}) \quad (4)$$

El problema del Despacho hidrotérmico consiste en optimizar los costos de operación, así que el modelo matemático se puede plantear así:

$$Z_{min} = Min \left\{ \sum_{i=1}^n Ct(D_i - Gh_i) + FCF_{n+1}(V_{n+1}) \right\} \quad (5)$$

Sujeto a:

$$V_i = V_{i-1} + Y_i - U_i - S_i \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V_{MIN} &\leq V_i \leq V_{MAX} \\ 0 &\leq U_i \leq U_{MAX} \end{aligned} \quad (7)$$

$$Gt_{MIN} \leq Gt_i \leq Gt_{MAX}$$

#### 4. PROGRAMACION DINAMICA (PD)

La PD resuelve un problema global, descomponiéndolo en etapas que se enlazan mediante cálculos recursivos de

manera que se genere una relación óptima factible a todo el problema.

Para el problema del despacho hidrotérmico planificado a un año se realiza una descomposición en periodos mensuales.  $V_0$  es el volumen al inicio del año y  $V_n$  es el Volumen final. Tenemos las siguientes relaciones:

$$V_n = f_n(V_{n-1}); V_{n-1} = f_{n-1}(V_{n-2}); \dots; V_1 = f_1(V_0)$$

, equivalente a:  $V_n = f_n(f_{n-1}(\dots(f_1(V_0))))$ .

En cada mes (etapas del problema) tenemos un conjunto de decisiones agrupadas en un vector  $\vec{U}$  (Posibles turbinamientos). Sea  $\vec{C}$  (Costo operativo para cada etapa) un vector que mide la eficiencia de la operación del sistema hidrotérmico. Cada componente  $c_i$  es el costo de operación en cada mes y depende del volumen de entrada a la etapa **i** y la decisión que se tome, o sea,  $c_i = C_i(V_i, U_i)$ . Tenemos entonces:

$$V_n = f_n(f_{n-1}(\dots f_1(V_0, U_1), U_2), \dots, U_n) \text{ y}$$

$$C = c_n(c_{n-1}(\dots c_1(V_0, U_1), U_2), \dots, U_n)$$

Estas dos ecuaciones muestran que la salida final y el costo son funciones de la entrada inicial y las decisiones tomadas en cada etapa.

El problema consiste entonces en optimizar la composición de los costos de cada mes, por lo cual se tratará de encontrar las decisiones  $(U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*)$  del conjunto  $(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n)$  que optimicen la composición<sup>4</sup>  $[c_n \circ c_{n-1} \circ \dots \circ c_1]$ ; la formulación del problema de optimización es la siguiente:

$$Z_{min} = Min_{U_n, \dots, U_2, U_1} (c_n \circ c_{n-1} \circ \dots \circ c_1).$$

$$\text{Sujeto a: } V_i = V_{i-1} + Y_i - U_i - S_i$$

$$V_{MIN} \leq V_i \leq V_{MAX}$$

$$0 \leq U_i \leq U_{MAX}$$

$$Gt_{MIN} \leq Gt_i \leq Gt_{MAX}$$

**La función recursiva.** La idea de la función recursiva es poder dividir el problema de optimización en **n** subproblemas de optimización de una sola etapa (meses). Para garantizar la optimalidad del problema global y poder separar el problema de minimización en subproblemas, la función objetivo debe cumplir con las condiciones derivadas por Mitten [1] que son las condiciones de *monotonidad* y de *separabilidad*. Bajo estas condiciones

<sup>4</sup> Como se puede ver en la ecuación (5), esta composición es en forma de suma.

el problema de despacho hidrotérmico consistirá en determinar la FCF para cada etapa de forma recursiva así:

$$FCF_{i-1} = \underset{U_i}{\text{Min}} \{C_i(D_i - U_i) + FCF_i(V_i)\}$$

## 4.2 PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA

La Programación Dinámica Estocástica (PDE) considera el carácter aleatorio de algunas variables del problema. Para el caso del despacho hidrotérmico, la variable aleatoria será la afluencia. Por medio de los datos históricos de afluencia se buscará una función de distribución de probabilidad discreta para esta variable. La función recursiva de la PDE estima la esperanza matemática de la FCF para la etapa siguiente:

$$FCF_{i-1}(\vec{V}_i) = \underset{A_i}{\text{Min}} \sum_{A_i} P_i(A_i) \{C_i(D_i - U_i) + FCF_i(\vec{V}_i)\}$$

Donde  $P_i(A_i)$  es la probabilidad de que la afluencia  $A_i$  ocurra. El uso de la esperanza matemática se justifica por el hecho de que es un buen estimativo de todos los costos posibles y además facilita los cálculos computacionales.

## 5. APLICACIÓN

Esta aplicación consiste en utilizar la PDE con el propósito de encontrar la solución óptima al problema de despacho hidrotérmico para una planta hidráulica y una térmica planificando a un año, con periodos mensuales (12 meses). La planta considerada fue la central hidroeléctrica de Chivor, que es una central de embalse con afluencias provenientes del río Batá. Se ha considerado una configuración en nodo único del sistema hidrotérmico.

**Datos del Problema.** Los parámetros de la central hidroeléctrica de Chivor son:

- Río afluente: Batá.
- Embalse: La Esmeralda.
- Factor medio de Turbinamiento: 6.86 [MW/ (m<sup>3</sup>/s)]
- Volumen Útil: 591 [Mm<sup>3</sup>]. (1126 GWh).
- Altura líquida neta: 786 [m]
- Potencia Instalada: 1000 [MW]. (Asociado al Turbinamiento Máximo).

Para la obtención de las afluencias al embalse, se utilizaron los registros históricos de los caudales del río Batá del año 1955 a 1999 [4].

Los datos de Energía y demanda usados para este problema se obtuvieron de la página de la Unidad de Planeación Minero Energética UPME. [3] [4].

La central térmica es una central con parámetros típicos de generación. La función de costo de generación es cuadrática:  $Ct_i(g) = ag^2 + bg + c + E_i$ ; los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son constantes para todos los periodos, y el parámetro  $E$  en [U.M] (Unidades Monetarias) cambia para cada mes considerando el efecto del corrimiento del precio

de oferta de la central térmica en un esquema de mercado de energía. Los Valores de las parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  son<sup>1</sup>:

$$a = 10 [U.M/KWh^2]; \quad b = 40.8 [U.M/KWh]; \\ c = 15 [U.M].$$

### Manejo de la Información

**Demanda:** Se aclara que la UPME pronostica tres tipos de demanda: Alta, Media y Baja; para los problemas de generación de energía se utiliza la demanda Alta [4]. La Demanda pronosticada por la UPME es la demanda doméstica total para el país; la central de Chivor no puede atenderla toda, así que los datos utilizados para el ejercicio son sólo la novena parte de los pronosticados. La demanda relativa se obtiene dividiendo los datos de demanda por 1126 GWh la cual es la energía total que posee la central de Chivor.

**Conversión de Caudal a Volumen relativo.** En [3], se encuentran los datos históricos de caudales de afluencia al embalse La Esmeralda. Estos datos son caudales promedio mensuales, así que debemos convertirlos en Volumen de agua mensuales multiplicándolos por 3600\*24\*30 segundos al mes. Este proceso se aplica a todos los datos (asumiendo que cada mes tiene 30 días). El volumen relativo, es el volumen de agua al mes dividido por el volumen total del embalse La Esmeralda, que es de 591Mm<sup>3</sup>.

**Obtención de Probabilidades** Se elaboraron histogramas de frecuencia relativa de los registros históricos de volumen relativo, obteniendo una distribución de probabilidad discreta de los posibles escenarios de afluencia para cada uno de los 12 meses. Por ejemplo para el mes de junio, con 20 discretizaciones en el nivel del embalse, se obtuvo el siguiente histograma:

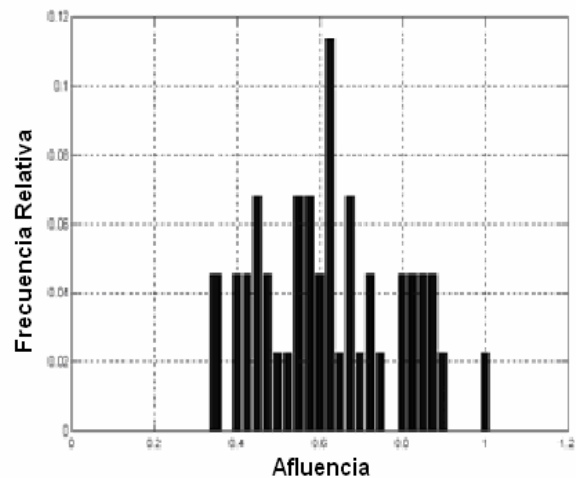


Figura 3. Histograma de Afluencias para el mes de junio.

<sup>1</sup> Los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  están referenciados a los valores de demanda relativa. Los valores del parámetro  $E$  se muestran en [3]

De la gráfica se puede observar que la probabilidad de que la afluencia relativa sea 0.4 (eje X) es de 0.045 (eje Y); que la probabilidad de que la afluencia relativa sea 0.5 (eje X) es de 0.025 (eje Y); y que la afluencia relativa más probable (eje Y) para este mes es de 0.65 (eje X).

**Nivel inicial del embalse:** Para este embalse el nivel inicial fue asumido como 0.6 veces la capacidad total.

**Meta final de Volumen:** Esta meta final de volumen consiste en el nivel de agua que debe quedar en el embalse al final del año; garantizando que será un nivel de agua suficiente para que no existan racionamientos para el año siguiente.

Para determinar la meta final, se realizó un despacho previo con un horizonte de seis años y con periodos anuales. El volumen de agua almacenada en el embalse al final del horizonte de seis años se asume como cero. Así que la función de costo futuro para el periodo final es  $FCF_6 = 0$ . Se calcula la FCF para los periodos anteriores, ( año 5, año 4,... ), por medio de la PDE (considerando periodos anuales).

De este despacho previo se extrae el dato de volumen de agua almacenado para el final del primer año (año 1).

De la misma manera se realiza el mismo despacho simulando diferentes escenarios de afluencia. El promedio aritmético de estos datos de volumen al final del primer año, será la Meta final de Volumen. En este trabajo se simularon 300 escenarios de afluencia con volumen inicial 0.6, obteniendo una Meta Final de volumen de 0.6 veces el nivel del embalse.

La siguiente figura muestra el nivel de agua en el embalse durante un periodo de seis años. Se asume que el volumen final es cero, y se presentan allí 10 de los 300 resultados obtenidos de los escenarios de afluencia simulados. Obsérvese que la meta final de volumen para el primer año es cercana a 0.6.

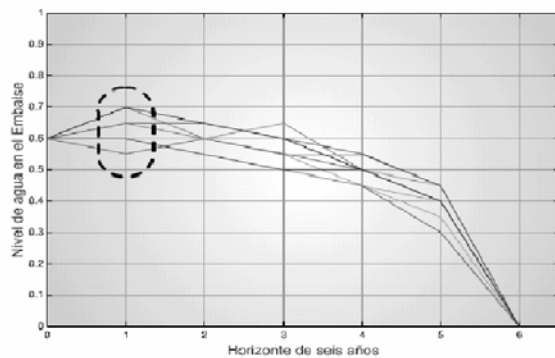


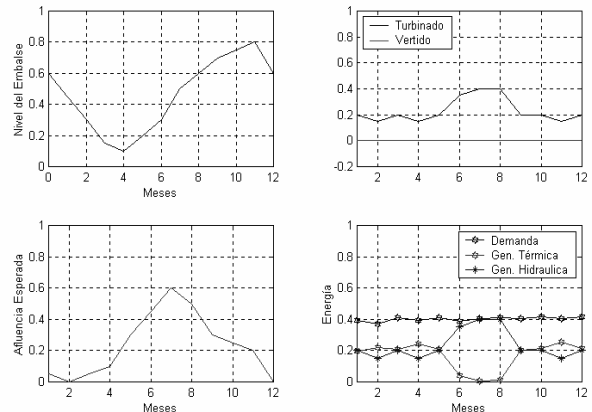
Figura 4. Nivel del embalse para un horizonte de seis años.

**Procedimiento, Programación y Resultados:** Los resultados que se exponen en este trabajo fueron obtenidos por medio de una aplicación de *Despacho Hidrotérmico*, desarrollada por los autores de este trabajo, y programada

bajo el Software Matlab®. Esta aplicación básicamente persigue dos objetivos:

- Trazar la política operativa óptima para distintos escenarios de afluencia, elegidos por el usuario o creados de forma aleatoria.
- Realizar un análisis estadístico de los resultados de la simulación de escenarios de afluencias probables y factibles.

**Política Operativa.** Las siguientes figuras son los resultados obtenidos de la solución del problema del despacho Hidrotérmico planificado a un año para la



central hidroeléctrica de Chivor. Se simuló el escenario de afluencias promedio.

Figura 5. Política Operativa para Chivor simulando el escenario de afluencias promedio.

La gráfica del nivel del embalse para los diferentes Meses muestra como debe ser el nivel del embalse a lo largo del año. Obsérvese que para el final del mes 12 el volumen del embalse es 0.6 que es la meta final de volumen determinada con anterioridad. El gráfico superior derecho muestra los turbinamientos en cada mes. El gráfico inferior izquierdo muestra la afluencia esperada (escenario de afluencias promedio) al embalse.

El gráfico inferior derecho contiene tres informaciones: la Demanda, generación Térmica y la generación Hídrica. La Demanda debe ser atendida por la suma de las generaciones térmicas e hidráulicas. Obsérvese que en los periodos donde el costo de generación térmica es grande (últimos meses del año) la generación térmica es baja, y además, se tiende a turbinar agua del embalse para dar espacio a la llegada de nuevas afluencias en las épocas húmedas.

**SIMULACIÓN Y ANALISIS ESTADISTICO.** De este análisis se obtienen conclusiones de cómo será el costo operativo del sistema Hidrotérmico. Para esto se simularon aleatoriamente (de acuerdo a las distribuciones de probabilidad de las afluencias relativas) 1000 escenarios de afluencia calculando el costo operativo para cada escenario.

Los siguientes valores corresponden a parámetros estadísticos de los mil costos operativos.

- Costo mínimo promedio ( $FCF_1$ ): 4826120 Unidades Monetarias (U.M).
- Promedio de los 1000 costos operativos de las políticas óptimas: 4831074 [U.M.].
- Desviación Estándar de los Costos operativos: 146440 [U.M]

La figura siguiente muestra la distribución de los mil costos operativos simulados.

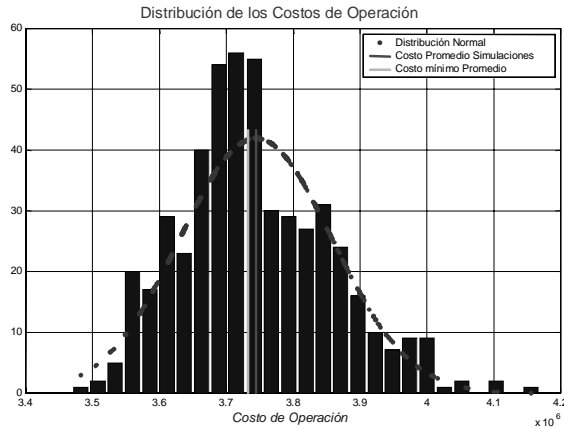


Figura 6. Distribución de los Costos Operativos de Diferentes escenarios de Afluencia.

Observemos que la distribución de los costos es Normal; esto se puede asegurar gracias al teorema del Límite Central, pues asegura que la distribución del promedio de una variable aleatoria es Normal. Podemos obtener un intervalo de confianza para el costo mínimo promedio, donde la media o esperanza será asumida como el promedio de los costos operativos de los escenarios simulados.

$$P\left(\bar{C}_{PDE} \leq C_{SIMUL} + 1.64 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\bar{C}_{PDE} \leq 4'831.071 + 1.64 \frac{146440}{\sqrt{1000}}\right) = 0.95$$

$$P(\bar{C}_{PDE} \leq 4'838668) = 0.95$$

$\bar{C}_{PDE}$ : Corresponde al costo mínimo promedio calculado por la programación dinámica estocástica. Está asociado al nivel inicial del embalse, y se determina por medio de la función de costo futuro del primer periodo. ( $FCF_1$ )

$\bar{C}_{SIMUL}$ : Corresponde al promedio aritmético de los costos de operación de las políticas operativas óptimas.

$S$ : Es la desviación estándar de la muestra; y  $n$  es el número de simulaciones.

El valor **1.64** corresponde al valor para el cual la función de distribución normal estándar con media cero y desviación uno tiene un valor de 0.95.

Esto significa que el 95% de las veces, el costo mínimo promedio será menor que 4838668 [U.M.]

## 6. CONCLUSIONES

El despacho hidrotérmico es un problema que involucra gran cantidad de variables, tales como el tipo de embalse, el mercado de energía, las restricciones de la red eléctrica, y además, variables de carácter aleatorio, de modo que el problema es demasiado complejo.

El problema del despacho hidrotérmico es de tipo Azar - Decisión, (la política operativa óptima para el embalse está supeditada a los agentes climáticos, de los cuales no se posee total certeza); la solución obtenida con la PDE permite ver todas las políticas operativas óptimas para cualquier escenario de afluencia factible.

En cuanto al nivel de agua en el embalse (a lo largo del horizonte de planeamiento) se puede observar que la política operativa óptima obtenida hace que se deba operar el embalse así:

Guardar agua para ser turbinada en los periodos donde el costo de generación térmica es alto (últimos meses del año).

Preparar el embalse para la llegada de grandes afluencias, o sea, se debe turbinar agua y llevar el embalse a niveles bajos, meses antes de los periodos de bastante afluencias.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] PRAWDA, Juan. Métodos y modelos de Investigación de Operaciones, Segunda edición, 640 páginas, Limusa, 1991.
- [2] SOARES F. Secundino. Memorias Seminario Planeamiento y Programación de la operación de sistemas de energía eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira Maestría en Ingeniería Eléctrica. Julio de 2004.
- [3] Solución al problema del Despacho Hidrotérmico de dos plantas mediante la Programación Dinámica Estocástica. Trabajo de grado. Facultad de Ingeniería Eléctrica e Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. Juan Carlos Bedoya y Mauricio Barrera. Marzo de 2005.
- [4] UNIDAD DE PLANEACION MINERO ENERGETICA UPME. Proyecciones de demanda de energía eléctrica y potencia máxima 2004-2010. Jul 2004. www.upme.gov.co