VOLUMEN DE LA HIPERESFERA.

OSCAR ANDRES MONTAÑO.
Matemático, Ms C
Universidad del Valle.
oscara@puj.edu.co

FERNANDO MESA
Licenciado en Matemáticas y Física, Ms.C
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira.
femesa@utp.edu.co

WILLIAM ANDRES SALAZAR ALZATE
Ingeniero Mecánico, Ms.C
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
wasalasar@utp.edu.co

RESUMEN

La soluciones fundamentales de la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \mu = 0$ [1], están dadas en términos de la constante $\alpha(n)$ [1]. Esta constante aparece por razones de normalización, su valor es π para *n* igual a 2 y $\frac{4\pi}{3}$ cuando *n* es 3; pero , ¿Cual es su valor si n es mayor que 3 ?. En este articulo se da la respuesta a este interrogante, el resultado mostrara una vez mas las misteriosas conexiones que aparecen en el universo de las matemáticas.

PALABRAS CLAVES: Función Gamma, método de Euler, ecuación de Laplace

ABSTRACT

The fundamental solutions of Laplace equations, $\nabla^2 \mu = 0$, are given in terms of the constant $\alpha(n)$, This constant appear for reason the normalization, its value is π for n equal to 2 and $\frac{4\pi}{3}$ when n is 3; but ¿what is the value if n is bigger than 3?. In this article will give the answer to this question, the result will show once again the mysterious connections that appear in the mathematics' universe

KEYWORDS: Gamma function, Euler method, Laplace equation.

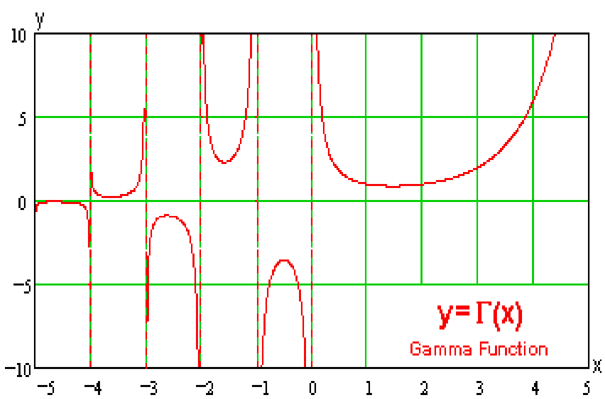

Grafico 1. Función Gamma

La función Gamma, $\Gamma(x) = \left(\frac{1}{x}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$, puede pensarse como una extensión de la función factorial a los números reales[1], lo introdujo originalmente el matemático Suizo Leonhard Euler (1707-1783), en su forma equivalente $\Gamma(x) = \int_0^{\infty}(t^{x-1}e^{-t})dt$ es la definición del Matemático Francés Adrien Legrendre (1752-1833).

Otros matemáticos que sintieron atracción por esta función fueron: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1852), Joseph Lioville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901), entre muchos otros.

Se presenta a continuación algunos resultados que serán de utilidad en el propósito planteado.

1. $\Gamma(1) = 1$ Se obtiene directamente la definición de Legendre.

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0$. Resulta de integrar por partes; esta propiedad permite extender la función Gamma a los negativos.

[1] Excluyendo los enteros menores o iguales a cero.

Fecha de Recepción: 31 Mayo de 2005
Fecha de Aceptación: 16 Agosto de 2005

3. $\Gamma(n+1)=n!, \quad n=0,1,2,3....$ Inducción matemática y la propiedad anterior.

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Demostración: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty (t^{1/2}e^{-t})dt$, haciendo la sustitución $t=y^2$ se obtiene $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty (e^{-y^2})dy$, esta famosa integral la calculo Gauss de la siguiente forma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dydx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=\pi$$

de donde se concluye el resultado.

5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{1,3,5,...(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$.

Se obtiene al aplicar repetidas veces las proposiciones 2 y 4.

2. TRASFORMADA DE LAPLACE.[2]

Parece ser que el desarrollo de la transformada de Laplace se inicia con la aparición de expresiones integrales de la forma: $\int e^{-px}f(x)dx$ que resultan del método de Euler para encontrar factores integrantes en ecuaciones diferenciales de orden mayor a uno. Los matemáticos de la época se dieron cuenta que el factor e^{-px} convertía las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, esta idea lleva a la construcción de una teoría que es ampliamente utilizada en la solución de ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, calculo de integrales impropias y otras aplicaciones de matemáticas puras.

La trasformada de Laplace de una fusión f es: $L[f(x)]=\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx$.

Algunos resultados de la transformada son:

6. $L[x^\alpha]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \alpha>-1.$ Demostración : $L[x^\alpha]=\int_0^\infty e^{-px}x^\alpha dx$, haciendo $t=px$; se obtiene $L[x^\alpha]=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$

7. $L\left[x^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$. Aplicación directa de 6 y 4.

8. $L^{-1}[F(p)G(p)]=\int_0^x f(\Gamma)g(x-\Gamma)d\Gamma.$[3] Este resultado se denomina Convolución, y se denota por $(f*g)(x)$. Esta fórmula permite calcular la transformada inversa de un producto de funciones, es decir, si $L[f(x)]=F(p)$ y $L[g(x)]=G(p)$ entonces $L[(f*g)(x)]=F(p)G(p).$

La demostración se puede encontrar en cualquier texto de ecuaciones diferenciales ordinarias. La generalización de este resultado lleva directamente al calculo del *volumen o mediada de la Hiperesfera.*

3. TEOREMA GENERAL DE LA CONVOLUCIÓN.

Sean $fi(x)$ y $Fi(p)$ funciones tales que $L[fi(x)]=Fi(p), i=1,2,3.$ del teorema de la Convolución

$$L^{-1}[F_1(p)F_2(P)F_3(p)]=$$
$$\int_0^x f_1(\Gamma_1)(f_2*f_3)(x-\Gamma_1)d\Gamma_1=$$
$$\int_0^x f_1(\Gamma_1)\int_0^{x-\Gamma_1} f_2(\Gamma_2)f_3(x-\Gamma_1-\Gamma_2)d\Gamma_2 d\Gamma_1$$

al escoger $f_3(x)=1$ se llega a :

$$L^{-1}\left[\frac{F_1(p)F_2(p)}{p}\right]=$$
$$\int_0^x\int_0^{x-\Gamma_1} f_1(\Gamma_1)f_2(\Gamma_2)d\Gamma_1 d\Gamma_2=$$
$$\iint_{0\le\Gamma_1+\Gamma_2\le x,\ \Gamma_i\ge 0} f_1(\Gamma_1)f_2(\Gamma_2)d\Gamma_1 d\Gamma_2$$

Al aplicar inducción matemática se llega a :

[2] Pierre Simón de Lapleace (1749-1827) fue un matemático astrónomo teórico francés, tan famoso en su tiempo que se le conocía como el Newton de Francia.

[3] $L^{-1}[F(p)]$ denota la transformada inversa, es decir la función cuya transformada es F(p)

9. $$L^{-1}\left[\frac{F_1(p)F_2(p)......F_n(p)}{p}\right]= \iint\limits_{0\le\Gamma_1+\Gamma_2\le x,\quad \Gamma i\ge 0} f_1(\Gamma_1)f_2(\Gamma_2)..f_n(\Gamma_n)d\Gamma_n...d\Gamma_2 d\Gamma_1$$

4. VOLUMEN DE LA HIPERESFERA

Si se tiene una hiperesfera de radio $R=\sqrt{x}$, su volumen viene dado por la integral:

$$V=2^n \iint\limits_{0\le\sum x^2{}_i\le x,\ \Gamma_i\ge 0}...\int f_1(\Gamma_1)f_2(\Gamma_2)...f_n(\Gamma_n)d\Gamma_n..d\Gamma_2 d\Gamma_1$$

El cambio de variable $x_i^2=\Gamma_i$ implica:

$$V=\iint\limits_{0\le\sum x^2_i\le x,\ x_i\ge 0}......\int\frac{d\Gamma_n}{\sqrt{\Gamma_n}}....\frac{d\Gamma_2}{\sqrt{\Gamma_2}}\frac{d\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_1}}$$, del teorema 9

$$V=L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{p}\frac{\sqrt{\pi}}{p}....\frac{\sqrt{\pi}}{p}\frac{1}{p}\right]=$$

$$L^{-1}\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{p}\right)^n\frac{1}{p}\right]=\pi^{n/2}L^{-1}\left[\frac{1}{p^{1+n/2}}\right]=$$

$$\pi^{n/2}\left[\frac{x^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}\right]$$

$$V=\frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(1+n/2)}$$

Resultado sorprendente. Se esta ahora en condiciones de hacer unos cálculos:

- $n=1\quad V=\dfrac{\pi^{1/2}R}{\Gamma(3/2)}=\dfrac{\pi^{1/2}R}{(1/2)\Gamma(1/2)}=2R$;

  Longitud del intervalo radio R
- $n=2\quad V=\dfrac{\pi^1 R^2}{\Gamma(2)}=\dfrac{\pi^2 R^2}{1}=\pi R^2$;

  Área del circulo de radio R
- $n=3\quad V=\dfrac{\pi^{3/2}R^3}{\Gamma(1+3/2)}=\dfrac{\pi^{3/2}R^3}{(3/2)\Gamma(3/2)}=\dfrac{4\pi R^3}{3}$;

  Volumen de una esfera de radio R.
- $n=4\quad V=\dfrac{\pi^{43/2}R^4}{\Gamma(3)}=\dfrac{\pi^2 R^4}{2!}=\dfrac{\pi^2 R^4}{2}$;

  Medida de la esfera en R^4
- $n=5,\quad V=\dfrac{8\pi^2 R^5}{15}$;
- $n=6,\quad V=\dfrac{\pi^3 R^6}{6}$;

Los misterios de los números estriba en una desconcertante paradoja: si los números son tan solo un producto de la mente humana, entonces porque existe una correspondencia tan notable con el universo físico?. La historia de las matemáticas incluye expresiones casi místicas que relacionan entre sí con elegancia las variedades matemáticas mas elegantes.[4]

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] LAWRENCE C, Evans. *Partial Differential Equations*, 661 páginas, *Mathematical Society*, Estados Unidos, 1998.

[2] GEORGE F, Simmons. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas,* Segunda edición, 657 paginas, Mc Graw Hill, España, 1993.

[3] M.L., Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makarento. *Calculo operacional y teoría de la estabilidad*, 240 páginas, Editorial Mir, Moscú, 1993.

[4] CALVIN C. Clawson. *Misterios matemáticos, magia y belleza de los números*, 361 paginas, Editorial Diana, México, 1999.

[4] Ver referencia [4]