SOBRE LA DETERMINACIÓN DE LA MOVILIDAD EN LOS MECANISMOS

ALEXÁNDER DÍAZ ARIAS
Ingeniero Mecánico, Esp.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
adiaza@utp.edu.co

HÉCTOR FABIO QUINTERO
Ingeniero Mecánico, M.Sc.,
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
hquinte@utp.edu.co

RESUMEN
Este artículo trata sobre la determinación del número de grados de libertad en los mecanismos. Se presentan y discuten las expresiones más referenciadas en la literatura para la determinación de este importante parámetro cinemático. Se concluye la importancia práctica y académica del uso de expresiones generalizadas. Se muestra la conveniencia del uso de la fórmula generalizada de Malyshev.

PALABRAS CLAVES: Mecanismo, Cadena cinemática, Par cinemático, Número de grados de libertad. Movimiento prescrito. Familia del mecanismo, Contornos. Fórmula de Mályshev.

ABSTRACT
This paper addresses on the determination of the number of degrees of freedom in the mechanisms. The referenced expressions in Literature for the determination of this important kinematical parameter appear and discuss. The practical and academic importance of the use of generalized expressions concludes. Shown the convenience of the use of the generalized Malyshev´s formula.

KEYWORDS: *Mechanisms, Kinematic Chain, Kinematic Pair, Number of Degrees of Freedom, Constrained Motion, Family of a mechanism. Contours, Malyshev´s formula.*

1. INTRODUCCIÓN

La definición clásica y precisa de *Mecanismo* lo determina como aquella cadena cinemática en la que, al comunicar un movimiento dado a uno o varios eslabones independientes, los restantes realizan movimientos completamente determinados [1]. Este concepto induce a su vez al de *movimiento restringido o prescrito*, denominado por Reuleaux como el concepto más importante de la Cinemática: “La Teoría del Movimiento Restringido es la rama de la Mecánica que estudia cómo una máquina debe ser construida para que todas sus partes describan trayectorias determinadas (prescritas) durante su movimiento, bajo la acción de fuerzas externas. [2]. Es evidente que el movimiento prescrito es el requerimiento principal que determina la funcionalidad de una máquina.

En el caso general, para que el movimiento prescrito tenga lugar, es necesario que el número de actuadores sea igual al número de grados de libertad (movilidad) W del mecanismo con respecto al bastidor del mismo. Este mismo número determina también la cantidad de coordenadas de entrada, necesarias para la realización del análisis geométrico y cinemático del mecanismo. Es decir, para un mecanismo constituido por m eslabones y con k grados de libertad [3]:

$$x_s = \prod_s \left(q_1, q_2, ..., q_k\right) \quad \left(s = 1,2,...,m\right) \qquad (1.1)$$

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \prod_s}{\partial q_k} \dot{q}_k \qquad (1.2)$$

$$\ddot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \prod_s}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 \prod_s}{\partial q_k \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r \qquad (1.3)$$

Los libros de texto de Ingeniería presentan, por lo general, para la determinación del número de grados de libertad, la denominada ecuación de Grüebler en la modificación de Kuzbach [4, 5, 6]:

$$GDL = 3(L-1) - 2J_1 - J_2 \qquad (2)$$

Donde: L = número de eslabones; J_1 = número de juntas completas (pares cinemáticos con cinco enlaces) y J_2 = número de semijuntas (pares de cuatro enlaces)

Esta ecuación permite la determinación correcta de la movilidad de los llamados mecanismos planos, libres de enlaces y movilidades redundantes.

Si bien los mecanismos planos son una abrumadora mayoría en la técnica, no se debe inducir al estudiante que son únicos, lo anterior limita la comprensión de los mecanismos no-planos, que a veces representan soluciones ingenieriles más prácticas y en algunos casos muy difundidas como en el caso de los mecanismos esféricos [7].

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2005
Fecha de Aceptación: 15 Marzo de 2005

Se presenta como más correcto el uso de fórmulas generales como la de Somov-Malyshev [7, 8, 9]. La cual manipula conceptos espaciales más naturales y enriquece la comprensión de la estructura general de todos los mecanismos en los estudiantes.

Se mostrarán las dos formas más comunes de presentación de dicha fórmula, algunas de sus limitaciones y procedimientos para su correcto uso.

2. LA FÓRMULA DE MALYSHEV

La fórmula de Malyshev, para la determinación del número de grados de libertad de un mecanismo con respecto al bastidor, se presenta por lo general de la siguiente manera [1, 7]

$$W = 6n - 5p_V - 4p_{IV} - 3p_{III} - 2p_{II} - p_I \quad (3.1)$$

Donde:
p_I es el número de pares de I clase que posee la cadena cinemática,
p_{II} es el número de pares de II clase,
p_{III} es el número de pares de III clase,
p_{IV} es el número de pares de IV clase y
p_V es el número de pares de V clase;

Se denotan aquí, los pares de acuerdo o su clase o número de enlaces que imponen. Lo que permite la generalización de la expresión:

$$W = 6n - \sum_{j=1}^{5} j \cdot p_j \quad (3.2)$$

La aplicación de esta fórmula a un mecanismo en particular supone, además de la ausencia de movilidades y enlaces redundantes, la posible movilidad de al menos uno de los eslabones para cada uno de los ejes cartesianos, es decir: T_x, T_y T_z, R_x, R_y R_z,

Esta limitación se hace evidente en el siguiente ejemplo

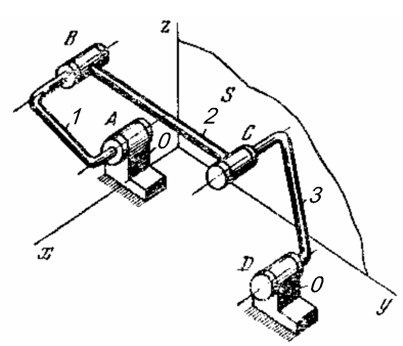


Figura 1. Mecanismo de cuatro eslabones [7].

$$W = 6n - 5p_V - 4p_{IV} - 3p_{III} - 2p_{II} - p_I = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2$$

Dificultad que se supera fácilmente, si se usa, por ejemplo, la fórmula de Kutzbach (2).

3. LA FÓRMULA DE MALYSHEV GENERALIZADA

Para la aplicación de la fórmula de Malyshev a algunos "tipos" de mecanismos comunes en la técnica como los planos y esféricos, se ha planteado la denominada fórmula de Malyshev generalizada o fórmula de Dobrovolsky [9,8]:

$$W = (6 - f)n - \sum_{j=f+1}^{5} (j - f) \cdot p_j \quad (4)$$

La familia *f* de un mecanismo es el número de grados de libertad que fueron eliminados de todos los eslabones del sistema.

De la fórmula (4) se deduce que la fórmula (3) sólo es válida para los mecanismos de familia 0 donde es posible la movilidad de al menos uno de los eslabones en cada uno de los ejes cartesianos.

Uno de los tipos de mecanismos de familia 3 son los denominados planos. La pertenencia del mecanismo de la figura 1 a dicha familia puede ser revelada por medio de la denominada tabla de movilidad del mecanismo

Eslabón	T_X	T_Y	T_Z	R_X	R_Y	R_Z
0	No	No	No	No	No	No
1	No	No	No	Si	No	No
2	No	Si	Si	Si	No	No
3	No	No	No	Si	No	No
	No				No	No

Tabla 1. Tabla de movilidad

La familia del mecanismo es f = 3, ya que las movilidades T_X R_Y y R_Z están eliminadas de todos los eslabones. Nótese también que luego de las sustituciones pertinentes la fórmula de Kutzbach se obtiene fácilmente como caso particular de (4)

4. LA FÓRMULA DE LOS CONTORNOS

Esta fórmula parte de la hipótesis [10] de que los mecanismos pueden existir en distintos espacios de distinta dimensionalidad (D) y de distinta movilidad (M). La determinación de la movilidad (grados de libertad) de cada mecanismo debe realizarse luego de la determinación del espacio en el que existen. A manera de ejemplo:[1]

4.1. Espacio unidimensional (D=1) y de una movilidad (M=1)

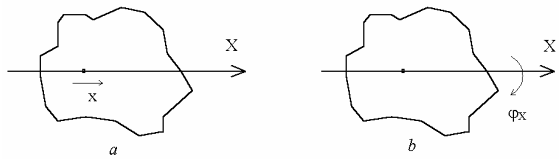


Fig. 2. Espacio unidimensional y de una movilidad

a) El cuerpo realiza un desplazamiento lineal a lo largo de *X* ó b) El cuerpo realiza un movimiento rotacional alrededor de *X*. Un cuerpo en el espacio unidimensional y de una movilidad puede realizar sólo un movimiento lineal o uno rotacional. Para crear un mecanismo se requiere un bastidor y eslabones móviles unidos por pares cinemáticos. En el espacio de una movilidad se pueden usar sólo pares cinemáticos de una movilidad, es decir pares giratorios o de deslizamiento.

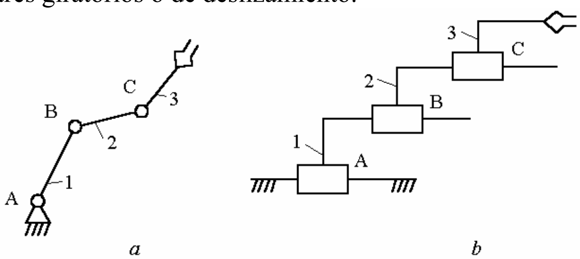


Fig. 3 *a)* Manipulador, *b)* Mecanismo de escalera telescópica

4.2. Espacios tridimensionales (D=3) y de tres movilidades (M=3)

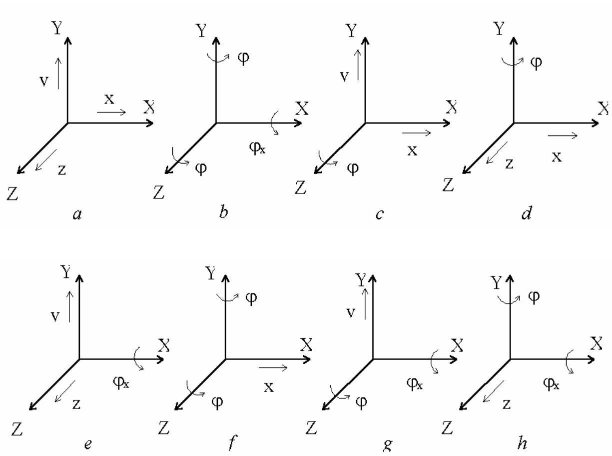


Fig. 4 Espacios tridimensionales de tres movilidades

Los sistemas tridimensionales se construyen sobre la base del sistema de coordenadas cartesiano. Tres movimientos independientes pueden realizarse por medio de las siguientes combinaciones:

a) Desplazamientos lineales *x*, *y*, z a lo largo de los ejes *X*, *Y*, *Z*;
b) Desplazamientos rotacionales φ_x, φ_y, φ_z alrededor de *X*, *Y*, *Z*;
c) Dos desplazamientos lineales *x*, *y* a lo largo de los ejes *X*, *Y* y uno rotacional φ_z alrededor del eje *Z*;
d) Dos desplazamientos lineales *x*, z, a lo largo de los ejes *X*, *Z* y uno rotacional φ_y alrededor del eje *Y*;
e) Dos desplazamientos lineales *y*, z, a lo largo de los ejes *Y*, *Z* y uno rotacional φ_x alrededor del eje *X*;
f) Un desplazamiento lineal *x* a lo largo del eje *X* y dos rotacionales φ_y, φ_z alrededor de los ejes *Y*, *Z*;
g) Un desplazamiento lineal *y* a lo largo del eje *Y* y dos rotacionales φ_x, φ_z alrededor de los ejes *X*, *Z*;
h) Un desplazamiento lineal z a lo largo del eje *Z* y dos rotacionales φ_x, φ_y, alrededor de los ejes *X* , *Y*.

Desde el punto de vista de Estructura de Mecanismos es suficiente con cuatro de estos espacios, por ejemplo, los que se muestran en las figuras 4 *a,b,c,f*. Los espacios de las figuras 4 *d,e* son análogos al espacio 4 *c*. Los espacios 4 *g,h* son equivalentes al espacio 4 *f*.

El espacio mostrado en la figura 4*c* es el más usado para el diseño de máquinas y mecanismos y comúnmente se denomina "plano" y a los mecanismos que en él existen se les denomina "mecanismos planos".

4.3. Espacios tridimensionales (D=3) y de seis movilidades (M=6)

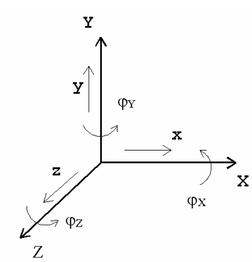


Fig. 5 Espacio tridimensional de seis movilidades

En el espacio tridimensional es posible realizar seis movimientos tres lineales *x*, *y*, z y tres rotacionales φ_x, φ_y, φ_z a lo largo y alrededor de los ejes *X*, *Y*, *Z* correspondientemente. En la figura 6 se muestra un manipulador que realiza los seis movimientos.

[1] Se muestran sólo algunos de los espacios posibles más relevantes

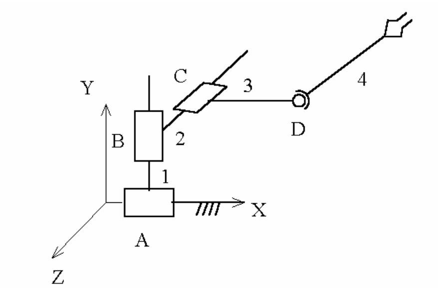
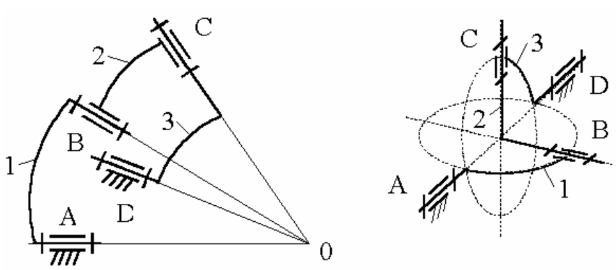


Fig. 6 Manipulador tridimensional de seis movilidades

Este espacio se usa con mucha frecuencia en la construcción de mecanismos y en la literatura se denomina comúnmente "espacio" y a los mecanismos existentes en él se les denomina "espaciales".

Los mecanismos mostrados arriba muestran que éstos pueden existir en planos y espacios abiertos, sin embargo el análisis de la literatura muestra que algunos mecanismos que existen en distintas *superficies* tanto abiertas como cerradas. A este tipo corresponde, por ejemplo, el ampliamente conocido mecanismo esférico de cuatro eslabones (Fig. 7 *a*) y la junta esférica de Hooke (Fig. 7 *b*). Existe una amplia gama de mecanismos que trabajan por ejemplo sobre cilindros, conos, elipsoides y otras superficies.



a) b)

Fig. 7 Mecanismos existentes en superficies: *a* - Mecanismo esférico de cuatro eslabones; *b* - Junta de Hooke

Los mecanismos sobre superficies también se determinan por su número de grados de libertad (movilidad). Los parámetros que caracterizan las superficies son la Dimensionalidad (D) y la Movilidad (M), o lo que es lo mismo, el número de movimientos independientes permitidos.

4.4. Contornos estructurales

Un contorno estructural se forma como el resultado de seguir, por medio de una línea ininterrumpida, a lo largo de los eslabones y pares cinemáticos, desde una unión al bastidor a otra o desde la fijación de un eslabón móvil a otro regresando obligatoriamente al punto de partida.

Se considera un contorno como independiente si se diferencia de los otros por lo menos en un eslabón o en un par cinemático. Se considera como número de contornos independientes de un mecanismo el número mínimo de estos en los cuales ya entran todos los pares cinemáticos y eslabones que lo conforman. [10, 11, 3]

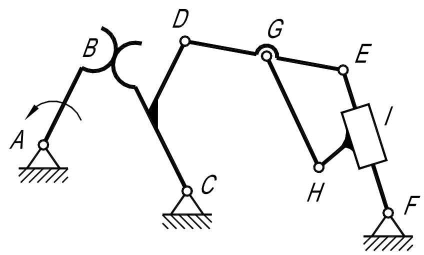


Fig. 8. Mecanismo de tres contornos independientes

El número de contornos cerrados k en el mecanismo de la Fig. 8, de acuerdo a la definición, como se puede apreciar son los siguientes: *ABCA*; *CDEFC*; *CDGHIFC*; *GHIEG*. En el mecanismo mostrado es posible denotar cuatro contornos; pero independientes, en los cuales ya entran todos los pares cinemáticos y eslabones serán sólo tres. Estos son o los contornos: *ABCA*; *CDEFC*; *CDGHIFC* o los contornos: *ABCA*; *CDEFC*; *GHIEG*. Es decir el mecanismo estudiado tiene tres contornos cerrados (circuitos) independientes ($k = 3$).

El número de grados de libertad de un mecanismo se puede expresar a través de su número de contornos cerrados independientes. Se considera que el número de grados de libertad es igual al número de movilidades permitidas por todos los pares del mecanismo menos el número de enlaces que impone cada contorno que se une.

$$W = \sum_{i=1}^{m} Wp_i - \sum_{q=1}^{k} S_q \qquad (5)$$

Donde Wp_i – Es la movilidad del par i; m – Es el número total de pares del mecanismo; S_q – Es el número de enlaces impuestos por el contorno q; k – Es el número de contornos independientes.

Nótese que contrario a lo anterior, se denotan aquí los pares de acuerdo a su movilidad y no a su clase o número de enlaces que imponen.

Para poder unir a un mecanismo un contorno independiente éste debe tener todas las movilidades que permite el espacio en el que se encuentra el mecanismo en formación. Es decir al unir uno, dos ... k contornos, se imponen uno, dos ..... k número de enlaces:

Si el espacio es de M movilidades:

$$S_1 = 1 \cdot \mathrm{M};$$

$S_2 = 2 \cdot \mathrm{M};$

. . .

. . .

. . .

$S_k = k \cdot \mathrm{M};$

Generalizando:

$$\sum_{q=1}^{k} S_q = k \cdot \mathrm{M} \qquad (6)$$

Miremos ahora el primer miembro de la ecuación (5)

Cada par de una movilidad le permite a los eslabones que une un grado de libertad, si se considera que en el mecanismo hay p_1 pares de una movilidad, el número de enlaces movilidades permitida por todos ellos es:

$$1 \cdot p_1 \qquad (7)$$

De manera análoga para los pares de dos, tres, etc ... movilidades, correspondientemente:

$$2 \cdot p_2$$
$$3 \cdot p_3$$
. . .

. . .

. . .

$$i \cdot p_i \qquad (8)$$

Generalizando, el número de grados de libertad permitido por todos los pares de acuerdo a su *clase* es:

$$\sum_{i=1}^{m} Wp_i = \sum_{i=1}^{M-1} i \cdot p_i \qquad (9)$$

Sustituyendo (9) y (8) en (5) obtenemos una expresión para la determinación de los grados de libertad de un mecanismo de acuerdo a su número de pares y contornos cerrados independientes.

$$W = \sum_{i=1}^{M-1} i \cdot p_i - k \cdot \mathrm{M} \qquad (10)$$

En la Teoría de Grafos el número de contornos independientes se denomina Número Ciclomático y se determina por la fórmula de Euler [10,11,3]:

$$k = p - n \qquad (11)$$

Donde $p = \sum_{i=1}^{M-1} p_i$ es el número total de pares del mecanismo

El mecanismo de la Fig. (8) tiene nueve pares (p = 9) y seis (n = 6) eslabones móviles. De acuerdo a la fórmula (11) el número de contornos independientes es tres (3).

5. EJEMPLO

Determinaremos la movilidad del mecanismo de la figura 9 por medio de los dos métodos expuestos.

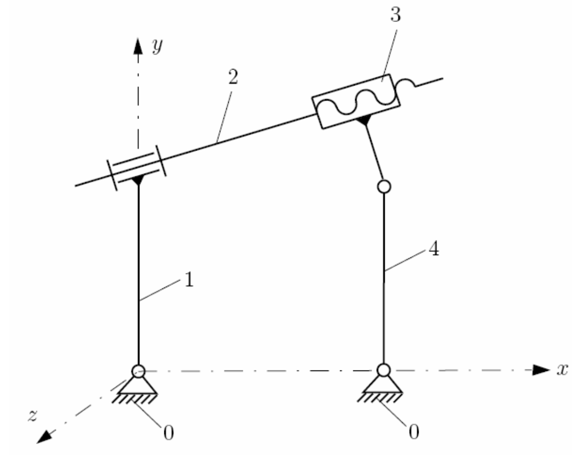


Fig. 9 Mecanismo de cuatro eslabones

La tabla de movilidad del mecanismo es

Eslabón	T_X	T_Y	T_Z	R_X	R_Y	R_Z
0	No	No	No	No	No	No
1	No	No	No	No	No	Si
2	Si	Si	No	Si	No	Si
3	Si	Si	No	No	No	Si
4	No	No	No	No	No	Si
			No		No	

Tabla 2. Movilidad del mecanismo de la Fig. 9

La familia del mecanismo es $f = 2$

El número de grados de libertad es

$$W = (6 - f)n - \sum_{j=f+1}^{5} (j - f) \cdot p_j \ ,$$

es decir

$$W = 4n - \sum_{j=3}^{5} (j-2) \cdot p_j = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 =$$
$$= 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1$$

Ahora,

Número de contornos independientes del mecanismo

$$k = p - n = 5 - 4 = 1$$

El número de grados de libertad:

$$W = \sum_{i=1}^{M-1} i \cdot p_i - k \cdot \mathrm{M} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 1$$

ya que todos los cinco pares del mecanismo son de una movilidad y la movilidad del espacio (M) es igual a cuatro (ver tabla 2, teniendo en cuenta que la dimensionalidad del espacio es D=3).

Los resultados obtenidos son iguales.

6. CONCLUSIONES

En la Teoría de Mecanismos y Máquinas, la determinación de los grados de libertad (movilidad) es el primer parámetro importante a ser determinado. Para la realización de análisis cinemática o dinámico de los mecanismos, las ecuaciones por lo general disponibles en la literatura de enseñanza de Ingeniería, no permiten de manera generalizada la determinación de dicho parámetro.

Se presenta y explica el uso de dos fórmulas generalizadas para el cálculo de una amplia gama de mecanismos.

Se presenta el concepto de Dimensionalidad y Movilidad de los espacios, se muestra su uso conjunto con la noción de los contornos cerrados para la determinación de la movilidad de los mecanismos.

La aplicación de la fórmula generalizada de Malyshev ha mostrado ser más simple e intuitiva, lo que permite su recomendación en el uso de los cursos de Teoría de Mecanismos y Máquinas para Ingenierías.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] CALLE G., DÍAZ A., QUINTERO. Curso de Teoría de Mecanismos y Máquinas. Notas de clase. UTP. 2004. Disponible en Internet: http://www.geocities.com/mecanautomat.

[2] HAIN, Kurt., Applied Kinematics. Second Edition, McGraw Hill, New York, 1967 – 727 pag.

[3] KOLOVSKY M.Z. Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer, Berlin, 2000 – 394 pag.

[4] NORTON R.L. Diseño de Maquinaria. McGraw Hill, México, 1995 – 794 pag.

[5] ERDMAN A.G., Diseño de Mecanismos : Análisis y síntesis. México. Prentice-Hall, 1998 – 672 pag.

[6] SHIGLEY J.E. Elementos de Maquinaria. Mecanismos. México. McGraw Hill, 1995 – 217 pag.

[7] ARTOBOLEVSKY I.I. Teoría de Mecanismos y Máquinas. Moscú. Nauka, 1988 -639 pag.

[8] N. RAZMARA, D. KOHLI, and A.K. DHINGRA, ON THE DEGREES OF FREEDOM OF MOTION OF PLANAR -SPATIAL MECHANISMS. Proceedings of DETC´00 ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Baltimore, Maryland, September 10-13, 2000 – 7 pag.

[9] MARGHITU D.B. Analytical Elements of Mechanisms Auburn University, Alabama, 2001 - 286 pag.

[10] SMELYAGUIN A.I. Estructura de Mecanismos y Máquinas. Novosibirsk. NGTU, 2001 – 286 pag.

[11] TSAI L.W. Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function, CRC Press 2000 – 328 pag.