

SOLUCIÓN ANALÍTICA DE MECANISMOS USANDO GRUPOS DE ASSUR.

RESUMEN

Se presentan soluciones analíticas para el grupo primario R y el grupo de Assur de clase II RRR, usando notación polar compacta y definiendo la inversión geométrica para llegar a una solución lineal, las soluciones analíticas son codificadas como funciones de MatLab y validadas mediante el análisis de un mecanismo por técnicas gráficas.

PALABRAS CLAVES: Cinemática, mecanismos, grupos de Assur.

ABSTRACT

It presents analytical solutions for primary group G and Assur's group of class II RRR, using compact polar notation and defining the geometric inversion to obtain a linear solution, analytical solutions are codified as MatLab functions and validated using a mechanism analysis by a graphic technique.

KEYWORDS: Kinematics, mechanisms, Assur's groups.

LEONARDO DE J. MESA P.

Ingeniero Mecánico
Profesor Catedrático
Estudiante Maestría Sistemas Automáticos de Producción
Universidad Tecnológica de Pereira
leomesa@gmail.com

SEBASTIÁN DURANGO I.

Ingeniero Mecánico
Docente Universidad Autónoma de Manizales.
Estudiante Maestría Sistemas Automáticos de Producción
Universidad Tecnológica de Pereira
sebasracer@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a Hinkle [6] la cinemática de máquinas se define como el estudio del movimiento relativo entre las partes de una máquina. Existen muchos enfoques posibles para el análisis cinemático de maquinas y mecanismos, se cuenta con métodos gráficos, algebraicos, vectoriales y matriciales, como se puede ver en Erdman y Sandor [5], Norton [8], Shigley [9], Mabie [7] y Calle, Calderón y Durango [4]. Las técnicas para el análisis cinemático presentadas en la anterior literatura adolecen de generalidad requiriéndose de su aplicación concreta sobre cada mecanismo particular. En el caso de mecanismos complejos es deseable un método general que permita resolver el análisis cinemático de una forma clara y simple. Una solución a este problema fue planteada en 1914 por el científico L. V. Assur, quien realizó el estudio de los mecanismos desde su estructura. Baranov [1] y Calle y colaboradores [2] presentan resúmenes del estudio de Assur sobre la estructura y el análisis cinemático de mecanismos planos.

Es posible entonces usar diferentes herramientas para obtener expresiones analíticas que resuelvan la cinemática de los grupos primarios y grupos de Assur y a partir de estas soluciones resolver la cinemática de cualquier mecanismo plano a partir de su estructura.

Se exploró la solución del grupo primario R y del grupo de Assur clase II RRR mediante representación vectorial. La manipulación de las expresiones vectoriales obtenidas se resolvió usando notación polar compacta, facilitándose el análisis de la velocidad y de la aceleración para el mecanismo, toda vez que los procesos de diferenciación respecto al tiempo se reducen a diferenciar funciones exponenciales.

Para la solución del grupo de Assur clase II RRR, se definió de antemano la inversión geométrica, valiéndose de un vector adicional entre los pares libres marcados como A y B en la Figura 2 y una variable discreta que toma uno de dos valores posibles de acuerdo a la configuración definida. Esta técnica fue usada por Erdman y Sandor [5] para el análisis del mecanismo plano de cuatro barras, y su principal ventaja es que conduce a una solución única para la posición a diferencia de las soluciones dobles propuestas por Calle y colaboradores [2].

Las expresiones analíticas obtenidas se programaron como funciones de MatLab¹ y se usaron para resolver la cinemática de un mecanismo de cuatro barras con estructura según Assur, I R → II RRR. La validación de las soluciones se resolvió mediante técnicas gráficas asistidas por computador para la posición, velocidad y aceleración.

2. GRUPO PRIMARIO R.

La solución del grupo primario R consistirá en resolver la posición, velocidad y aceleración del punto correspondiente al par libre, marcado como B en la Figura 1. Para la posición se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= f(\mathbf{r}_A, \theta_2, l_{AB}) \\ \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{BA} \\ \mathbf{r}_B &= l_{OA} \cdot e^{i\theta_1} + l_{BA} \cdot e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (1)$$

¹ MatLab es una marca registrada de MathWorks Inc.

También interesa resolver la posición, velocidad y aceleración de puntos particulares como los centros de masa, representados mediante el punto E en la Figura 1.

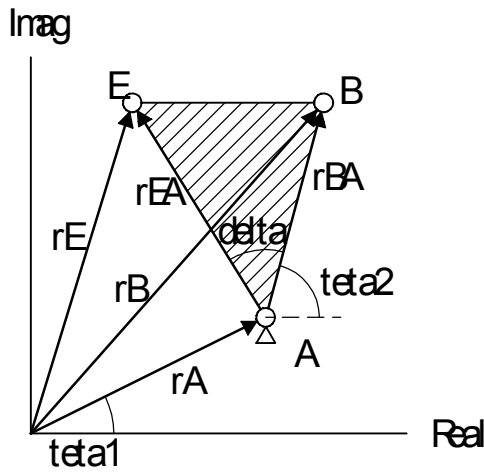


Figura 1. Grupo primario R.

Para la posición del punto E, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_E &= f(\mathbf{r}_A, \theta_2, l_{AE}, \delta) \\ \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{EA} \\ \mathbf{r}_B &= l_{OA} \cdot e^{i\theta_1} + l_{AE} \cdot e^{i(\theta_2+\delta)} \end{aligned} \quad (2)$$

Para las velocidades de los puntos B y E se diferencian las expresiones (1) y (2) respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= f(\mathbf{r}_A, \theta_2, l_{AB}, \omega_2); \text{ con } \omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} \\ \mathbf{v}_B &= \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{EA}}{dt} \end{aligned} \quad (3)$$

Como $\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = 0$, entonces la velocidad del punto B, será:

$$\mathbf{v}_B = \omega_2 i \cdot l_{BA} \cdot e^{i\theta_2} \quad (4)$$

Análogamente para la velocidad del punto E, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_E &= f(\mathbf{r}_A, \theta_2, l_{AE}, \omega_2, \delta) \\ \mathbf{v}_E &= \frac{d\mathbf{r}_E}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{EA}}{dt}; \quad \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = 0 \\ \mathbf{v}_E &= \omega_2 i \cdot l_{EA} \cdot e^{i(\theta_2+\delta)} \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora, para el análisis de la aceleración del punto B:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= f(\mathbf{r}_A, \theta_2, l_{AB}, \omega_2, \alpha_2); \quad \alpha_2 = \frac{d\omega_2}{dt} \\ \mathbf{a}_B &= \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} \\ \mathbf{a}_B &= -\omega_2^2 \cdot l_{AB} \cdot e^{i\theta_2} + \alpha_2 \cdot l_{AB} \cdot e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Análogamente para el punto E, la aceleración será:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_E &= f(\mathbf{r}_A, \theta_2, l_{AE}, \delta, \omega_2, \alpha_2); \quad \alpha_2 = \frac{d\omega_2}{dt} \\ \mathbf{a}_E &= \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} \\ \mathbf{a}_E &= -\omega_2^2 \cdot l_{EA} \cdot e^{i(\theta_2+\delta)} + \alpha_2 \cdot l_{EA} \cdot e^{i(\theta_2+\delta)} \end{aligned} \quad (7)$$

3. GRUPO DE ASSUR CLASE II RRR.

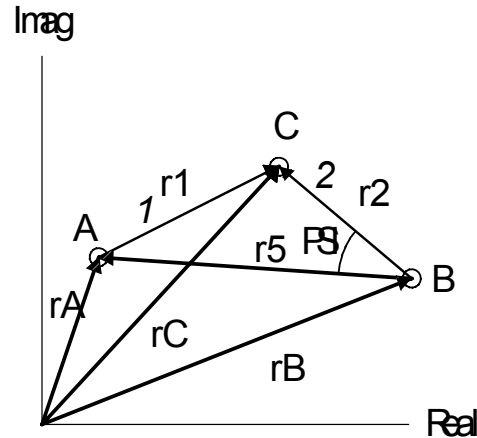


Figura 2. Grupo de Assur clase II RRR.

Para el grupo de Assur clase II RRR, es posible ensamblar la díada en una de dos inversiones geométricas; para determinar la inversión se usará la variable discreta μ que tomara uno de dos valores: $\mu = 1$ o $\mu = -1$, según la inversión: para una rotación horaria de \mathbf{r}_5 a \mathbf{r}_2 , $\mu = -1$, como se muestra en la Figura 2 correspondiente a la primera inversión geométrica. Ahora para la segunda inversión geométrica se tendría una rotación antihoraria de \mathbf{r}_5 a \mathbf{r}_2 y $\mu = +1$.

Sea ψ el valor absoluto del ángulo entre \mathbf{r}_5 y \mathbf{r}_2 con $0 \leq \psi \leq \pi$. El ángulo con signo entre \mathbf{r}_5 y \mathbf{r}_2 será $\mu\psi$.

Convención:

- Los ángulos se miden positivos con el eje X+ en sentido antihorario.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se resuelve la posición que consiste en determinar $(\theta_1, \theta_2, r_c) = f(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mu, l_{AC}, l_{AB})$, donde:

$$\begin{aligned} l_{AC} &= r_1; \\ l_{AB} &= r_2; \\ \mathbf{r}_5 &= \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \\ \psi &= \arccos\left(\frac{r_2^2 + r_5^2 - r_1^2}{2r_2r_5}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora es posible determinar la posición y orientación del eslabón 2:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \arg(\mathbf{r}_5) + \mu\psi \\ \text{por lo tanto:} \\ \mathbf{r}_2 &= l_{CB} e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (9)$$

Resuelta la posición del eslabón 2, se puede determinar \mathbf{r}_1

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ \theta_1 &= \arg(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Se resuelve entonces la posición del punto C:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_1 \quad (11)$$

3.1. Grupo de Assur clase II RRR, solución para un punto cualquiera en la díada. Una vez determinada la solución general para la díada, resulta directa la solución particular de cualquier punto sobre ella.

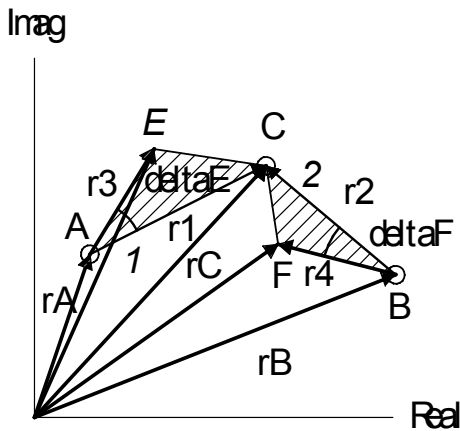


Figura 3. Grupo de Assur clase II RRR con puntos particulares.

Teniendo como entradas $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \delta_E, \delta_F, \theta_1$ y θ_2 , para el punto E del eslabón 1, se busca:

$$\mathbf{r}_E = f(\mathbf{r}_A, \theta_1, \delta_E, l_{AE}) \quad (12)$$

Se calcula el vector \mathbf{r}_3 , fijo con respecto a \mathbf{r}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= l_{AE} \cdot e^{i(\theta_1 + \delta_E)} \\ \mathbf{r}_E &= \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Ahora, para el punto F del eslabón 2, se tiene:

$$\mathbf{r}_F = f(\mathbf{r}_B, \theta_2, \delta_F, l_{BF}) \quad (14)$$

Se determina el vector \mathbf{r}_4 , fijo respecto a \mathbf{r}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_4 &= l_{BF} \cdot e^{i(\theta_2 + \delta_F)} \\ \mathbf{r}_F &= \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_4 \end{aligned} \quad (15)$$

3.2. Grupo de Assur clase II RRR, solución de la velocidad. La solución de la velocidad para el grupo de Assur clase II RRR, consiste en determinar:

$$(\omega_1, \omega_2, \mathbf{v}_C) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B) \quad (16)$$

Considerando el lazo que representa la díada se tiene:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B = 0 \quad (17)$$

Se diferencia la expresión (17) respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A) + \frac{d}{dt}(r_1 \cdot e^{i\theta_1}) - \frac{d}{dt}(r_2 \cdot e^{i\theta_2}) - \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_B) &= 0 \quad (18) \\ \mathbf{v}_A + \omega_1 i \cdot r_1 \cdot e^{i\theta_1} - \omega_2 i \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} - \mathbf{v}_B &= 0 \\ \omega_1 i \cdot r_1 \cdot e^{i\theta_1} - \omega_2 i \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} &= \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \end{aligned}$$

Desarrollando (18) de acuerdo a la identidad de Euler y separando las partes real e imaginaria se tiene:

$$\text{real: } -\omega_1 r_1 \sin \theta_1 + \omega_2 r_2 \sin \theta_2 = \text{real}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \quad (19)$$

$$\text{imag: } -\omega_1 r_1 \cos \theta_1 + \omega_2 r_2 \cos \theta_2 = \text{img}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \quad (20)$$

Las expresiones (19) y (20), constituyen un sistema de ecuaciones lineales para ω_1 y ω_2 , que tiene solución:

$$\omega_1 = \frac{-\sin \theta_2 \cdot \text{img}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) - \text{real}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot r_1} \quad (21)$$

$$\omega_2 = \frac{-\cos \theta_1 \cdot \text{real}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) - \text{img}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot r_2} \quad (22)$$

Ahora resulta directa la determinación de \mathbf{v}_C :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_2 \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_2) \quad (23) \\ \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \omega_2 i \cdot \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

3.3. Grupo de Assur clase II RRR, solución de la velocidad para un punto cualquiera en la díada. Se considera resuelta la posición del punto E y las velocidades en la díada. De la expresión (13), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_E &= \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_E &= r_A e^{i\theta_A} + r_3 e^{i(\theta_1 + \delta_E)}; \quad r_3 = l_{AE} \end{aligned} \quad (24)$$

La solución de la velocidad consistirá en determinar $\mathbf{v}_E = f(\theta_1, \delta_E, r_3, \omega_1, \mathbf{v}_A)$, entonces diferenciando la expresión (24) con respecto al tiempo, se llega a :

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_A + \omega_1 i \cdot r_3 e^{i(\theta_1 + \delta_E)} \quad (25)$$

De igual forma, para el punto F, de la expresión (15)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_F &= \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_F &= r_B e^{i\theta_B} + r_4 e^{i(\theta_2 + \delta_F)} \\ \mathbf{v}_F &= \frac{d}{dt} \mathbf{r}_F = \mathbf{v}_B + \omega_2 i \cdot r_4 e^{i(\theta_2 + \delta_F)} \end{aligned} \quad (26)$$

3.4. Grupo de Assur clase II RRR, solución de la aceleración. La solución de la aceleración para un grupo de segunda clase consistirá en determinar:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \mathbf{a}_C) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \omega_1, \omega_2, \mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B) \quad (27)$$

Se consideran resueltas la posición y la velocidad. A partir de (18) se resuelve la aceleración:

$$\omega_1 i \cdot r_1 \cdot e^{i\theta_1} - \omega_2 i \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \quad (18)$$

Diferenciando respecto al tiempo:

$$\alpha_1 i \cdot r_1 e^{i\theta_1} - \omega_1^2 r_1 e^{i\theta_1} - \alpha_2 i \cdot r_2 e^{i\theta_2} + \omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$

donde: (28)

$$\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}; \quad \alpha_i = \frac{d\omega_i}{dt}; \quad \mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

Separando la parte real y la parte imaginaria de la expresión (28), de acuerdo a la identidad de Euler:

real:

$$-\alpha_1 r_1 \sin \theta_1 - \omega_1^2 r_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 r_2 \sin \theta_2 + \omega_2^2 r_2 \cos \theta_2 = \text{real}(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A); \quad (29)$$

imaginaria:

$$\alpha_1 r_1 \cos \theta_1 - \omega_1^2 r_1 \sin \theta_1 + \alpha_2 r_2 \cos \theta_2 + \omega_2^2 r_2 \sin \theta_2 = \text{img}(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A); \quad (30)$$

Las expresiones (29) y (30), forman un sistema de ecuaciones lineales para α_1 y α_2 que tiene solución:

$$\alpha_1 = \frac{\left(-\omega_1^2 r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_2 \cdot \text{img}(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A) \right)}{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot r_1} \quad (31)$$

$$\alpha_2 = \frac{\left(\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos \theta_1 \cdot \text{real}(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A) \right)}{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot r_2} \quad (32)$$

Ahora es posible resolver la aceleración del punto C, retomando la expresión 23:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \omega_2 i \cdot \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \omega_2 i \cdot r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (23)$$

Diferenciando respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B - \omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} + \alpha_2 i \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B - \omega_2^2 \bar{r}_2 + i\alpha_2 \cdot \bar{r}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

donde:

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}; \quad \omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}; \quad \alpha_i = \frac{d\omega_i}{dt}$$

3.5. Grupo de Assur clase II RRR, solución de la aceleración para un punto cualquiera en la díada. Se consideran resueltas la posición y la velocidad del punto E y las aceleraciones angulares para los eslabones. Retomando (25) y diferenciando, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_E &= \mathbf{v}_A + \omega_1 i \cdot r_3 e^{i(\theta_1 + \delta_E)} \\ \mathbf{a}_E &= \mathbf{a}_A - \omega_1^2 r_3 \cdot e^{i(\theta_1 + \delta_E)} + i\alpha_1 r_3 \cdot e^{i(\theta_1 + \delta_E)} \\ \text{con } r_3 &= l_{AE} \end{aligned} \quad (34)$$

Análogamente, a partir de (26), para F se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F &= \mathbf{v}_B + \omega_2 i \cdot r_4 e^{i(\theta_2 + \delta_F)} \\ \mathbf{a}_F &= \mathbf{a}_B - \omega_2^2 r_4 \cdot e^{i(\theta_2 + \delta_F)} + i\alpha_2 r_4 \cdot e^{i(\theta_2 + \delta_F)} \end{aligned} \quad (35)$$

4. PROGRAMACIÓN EN MATLAB Y VALIDACIONES.

Las soluciones de la posición velocidad y aceleración del grupo primario R y del grupo de Assur clase II RRR se codificaron como funciones de MatLab. Dichas funciones operan sobre arreglos de vectores y permiten el análisis de múltiples posiciones para un mecanismo dado.

Para validar las soluciones obtenidas se resolvió la cinemática de un mecanismo de cuatro barras que tiene

una estructura según Azur IR→IIRRR. Los parámetros geométricos y cinemáticos están de acuerdo a la notación de la Figura 4 y están descritos por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0^\circ && \text{Orientación del eslabón fijo} \\ \theta_2 &= 30^\circ && \text{Orientación del eslabón de entrada} \\ l_{O_2A} &= 2 \text{ cm}; l_{AB} = 7 \text{ cm}; l_{BO_4} = 9 \text{ cm}; l_{O_2O_4} = 6 \text{ cm} && (36) \\ l_{AP} &= 6 \text{ cm}; \delta_3 = \pi/6 \text{ rad} \\ \omega_2 &= 10 \text{ rad/s}; \alpha_2 = 0 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

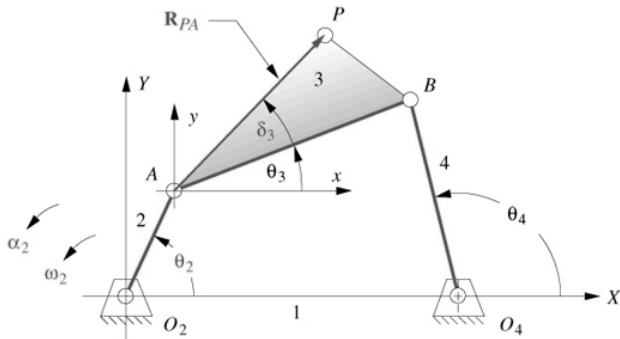


Figura 4. Mecanismo cuatro barras.

4.1 Solución del grupo primario. En primer lugar se resuelve la cinemática del grupo primario, formado por el eslabón 2 y su unión al bastidor. La solución consiste en resolver la posición, velocidad y aceleración del punto A, según las expresiones (1), (4) y (6):

$$(\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A) = f(\theta_2, l_{O_2A}, \omega_2, \alpha_2) \quad (37)$$

Imponiendo un marco de coordenadas en O_2 y reemplazando los valores de la expresión (36), en las funciones codificadas en MatLab se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= 2 \text{ cm} \angle 30^\circ \\ \mathbf{v}_A &= 20 \text{ cm/s} \angle 120^\circ \\ \mathbf{a}_A &= 200 \text{ cm/s}^2 \angle -150^\circ \end{aligned} \quad (38)$$

4.2 Solución del grupo clase II RRR. Una vez resuelto el grupo primario, se alimenta su solución como entrada para la solución del grupo de Assur clase II RRR, esto es resolver la posición, velocidad y aceleración de los puntos B y P, así como la orientación, velocidad y aceleración angular de los eslabones 3 y 4, según las expresiones (8), (9), (10), (11), (13), (21), (22), (23), (25), (31), (32), (33) y (34):

$$(\mathbf{r}_B, \mathbf{v}_B, \mathbf{a}_B, \theta_3, \theta_4, \omega_3, \omega_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{r}_P, \mathbf{v}_P, \mathbf{a}_P) = f(\theta_2, l_{O_2A}, \omega_2, \alpha_2, \theta_1, l_{O_2A}, l_{AB}, l_{BO_4}, l_{O_2O_4}, \mu) \quad (39)$$

Reemplazando los valores de las expresiones (36) y (38), con $\mu = -1$ en las funciones codificadas en MatLab se llega a:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 88,8372^\circ, \theta_4 = 117,2861^\circ, \\ \omega_3 &= -5,9910 \text{ rad/s}, \omega_4 = -3,9917 \text{ rad/s}, \\ \alpha_3 &= 26,0800 \text{ rad/s}^2, \alpha_4 = 53,3306 \text{ rad/s}^2, \\ \mathbf{r}_P &= 6,3629 \text{ cm} \angle 100,5214^\circ, \\ \mathbf{v}_P &= 40,7790 \text{ cm/s} \angle 58,2007^\circ, \\ \mathbf{a}_P &= 418,5556 \text{ cm/s}^2 \angle -119,5481^\circ \end{aligned} \quad (40)$$

4.3 Validaciones. Las validaciones a las soluciones analíticas por grupos de Assur se realizaron mediante la técnica gráfica de los planos de velocidad y aceleración.

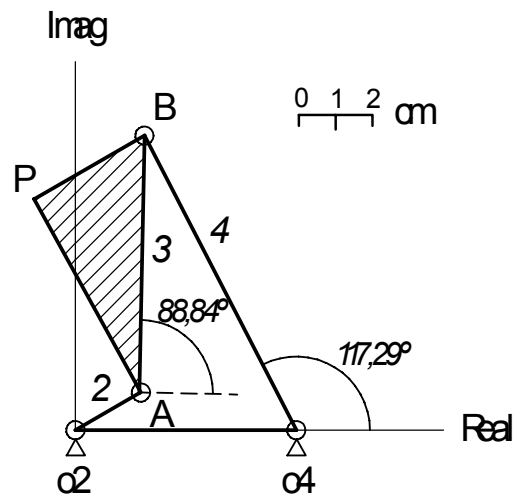


Figura 5. Solución gráfica de la posición.

La solución de la posición para la configuración ‘abierta’ del mecanismo se presenta en la Figura 5 de donde se pueden tomar asistidos por computador los datos:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 88,84^\circ, \\ \theta_4 &= 117,29^\circ \end{aligned} \quad (41)$$

Con la técnica de los planos de velocidad es posible resolver las velocidades angulares de los eslabones 2 y 3 y las velocidades de los puntos B y P, Figura 6.

$$\begin{aligned} \omega_3 &= -5,99 \text{ rad/s}, \\ \omega_4 &= -3,99 \text{ rad/s}, \\ \mathbf{v}_A &= 20 \text{ cm/s} \angle 120^\circ, \\ \mathbf{v}_P &= 40,778 \text{ cm/s} \angle 58,201^\circ, \\ \mathbf{v}_B &= 35,925 \text{ cm/s} \angle 27,286^\circ \end{aligned} \quad (42)$$

Para resolver el problema de las aceleraciones se usó la técnica de los planos de aceleraciones, representada en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, de donde se puede medir asistido por computador y usando

un factor de escala y las relaciones cinemáticas adecuadas:

$$\alpha_3 = 26,09 \text{ rad/s}^2,$$

$$\alpha_4 = 53,33 \text{ rad/s}^2,$$

$$\mathbf{a}_P = 418,6 \text{ cm/s}^2 \angle -119,6^\circ,$$

$$\mathbf{a}_B = 500,9 \text{ cm/s}^2 \angle -136,08^\circ$$

Quedando validadas las soluciones analíticas para la posición, la velocidad y la aceleración del grupo primario R y el grupo estructural o grupo de Assur clase II RRR.

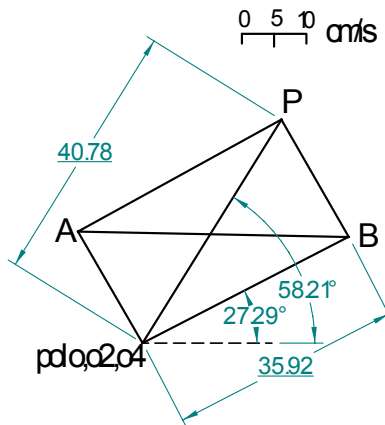


Figura 6. Plano de velocidades para el ejemplo de validación.

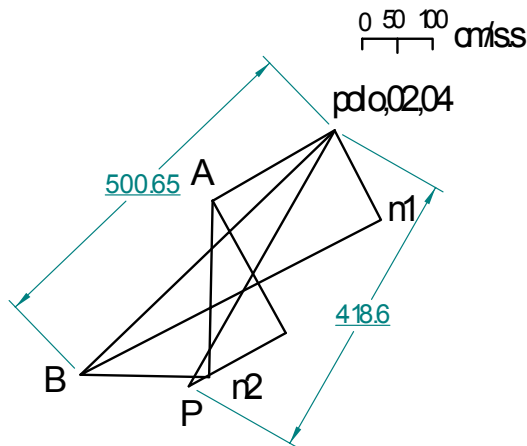


Figura 7. Plano de aceleraciones para el ejemplo de validación.

5. CONCLUSIONES.

La combinación del análisis estructural de mecanismos según Assur y el enfoque propuesto por Erdman y Sandor [5] para el análisis cinemático de mecanismos usando números complejos y definiendo la inversión cinemática resultó en una técnica general para el análisis de mecanismos planos con ventajas considerables para su codificación en computador.

El MatLab resulta es una herramienta adecuada para codificar las soluciones analíticas desarrolladas, permitiendo el análisis de múltiples posiciones en el rango propuesto del movimiento del mecanismo y con exactitud apropiada.

Es posible desarrollar programas CAE para análisis de mecanismos con fines académicos y comerciales con los recursos de que dispone el medio universitario regional.

Se espera poder aplicar esta técnica a otros grupos de Assur y desarrollar un programa para el análisis de mecanismos planos de acuerdo a lo expuesto.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] BARANOV, G. G. Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas, Segunda edición, 524 paginas, MIR, Moscú, 1985.
- [2] CALLE, Gabriel; DIAZ, Alexander y QUINTERO, Héctor F. Análisis Cinemático a partir del Análisis Estructural según Assur. V Congreso Iberoamericano de Ing. Mecánica, Mérida, 2001.
- [3] CALLE, Gabriel; QUINTERO, Héctor. F. y ROMERO Carlos. A. Mejoramiento Estructural de Mecanismos, Revista Scientia et Technica No. 9, Pereira, 1999.
- [4] CALLE, Gabriel, CALDERON, Marco T y DURANGO, Sebastián. Análisis Cinemático de Cadenas Cerradas usando Técnicas para el Análisis de Robots. Memorias del Congreso Nacional de la ACA, Ibagué, 2004.
- [5] ERDMAN, Arthur G. y SANDOR, George N. Diseño de Mecanismos: Análisis y Síntesis, Tercera edición, 645 paginas, Pearson, México, 1998.
- [6] HINKLE, Rolland T. Kinematics of Machines, 231 páginas, Prentice Hall. New York, 1953.
- [7] MABIE, Hamilton. Mecanismos y Dinámica de Maquinaria, Tercera edición, 632 paginas, Limusa, México, 2001.
- [8] NORTON, Robert L. Diseño de Maquinaria, Segunda edición, McGraw - Hill, México, 1995
- [9] SHIGLEY, Joseph E. y UICKER, John J. Teoría de Maquinas y Mecanismos, McGraw - Hill, México, 1988.