UNA NOTA SOBRE LA CONJETURA DE GOLDBACH

CAMPO ELÍAS GONZÁLEZ P.
Ms.C en matemáticas
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
cegp@utp.edu.co

RESUMEN
En este artículo damos un enunciado equivalente a la Conjetura de Goldbach y hacemos una demostración por inducción. Para lograr nuestro objetivo enunciamos varios resultados que nos conducirán a deducir el resultado mencionado.

PALABRAS CLAVES: Par, primo, impar.

ABSTRACT
In this paper we try to prove the Goldbach's conjecture. We give an equivalent expression which seems simpler than the first one. To get the objective we need some important results during the process.

KEYWORDS: Even, prime, odd.

1. INTRODUCCIÓN

En 1742 Christian Goldbach afirmó que todo número par mayor o igual a 4 se puede expresar como la suma de dos números primos positivos, esta afirmación es conocida como la conjetura de Goldbach y es uno de los problemas importantísimos que no ha sido resuelto por las matemáticas. Nadie ha presentado una demostración formal pero ha sido verificada por cálculo directo. En el año 2000 por medio de una red de computadores se verificó la conjetura hasta un número de $4*10^{14}$.

2. CONTENIDO

El primer resultado que necesitamos es el siguiente.

Teorema 1. *Todo entero impar es de la forma* $4n+1$ *ó* $4n-1$.

La demostración de este resultado es simple y se deja al lector. Lo importante es que todo número primo distintito de 2 es impar y por tanto es de esta forma. De otro lado analicemos algunos casos en los que se comprueba la conjetura por cálculo directo.

$4=2+2$ $\qquad$ $16=13+3=11+5$

$6=3+3$ $\qquad$ $24=17+7=19+5$

$8=5+3$ $\qquad$ $80=73+7=37+43$

$10=5+5=7+3$ $\qquad$ $8900=7+8893=13+8887$

$12=7+5$

$14=7+7=11+3$

Observemos los números pares de la forma $2k$ donde k es par y los números pares de la forma $2k$ donde k es impar. Una sencilla observación a los resultados anteriores es que los números primos involucrados en cada caso no son únicos necesariamente. Además si la conjetura fuera cierta tendríamos lo siguiente:

Si k es par buscamos un impar I de tal manera que

$$2k = k + k = k + I + k - I = p_1 + p_2$$

con p_1 y p_2 números primos positivos.
Si k es impar buscamos un par P de tal manera que

$$2k = k + k = k + P + k - P = p_1 + p_2$$

donde p_1 y p_2 números primos positivos.
Si las dos afirmaciones anteriores son ciertas tendríamos demostrada la conjetura. Más aún, podemos enunciarlas de la siguiente manera.

Teorema 2. *Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *Sea* $I \geq 3$ *un impar dado. Entonces, existe un par P de tal manera que*
$$P + I = p_1 \text{ e } I - P = p_2$$
donde p_1 *y* p_2 *números primos positivos.*
2. *Sea* $I \geq 3$ *un impar dado. Entonces, existen m y n enteros positivos de tal forma que*
$$I = 2(m+n)+1 \quad \text{ó} \quad I = 2(m+n)-1$$
y números primos

$$p_1 = 4n+1,\ p_2 = 4m+1 \textbf{ ó}$$
$$p_1 = 4n-1,\ p_2 = 4m-1$$

Demostración

$\Rightarrow$) Por hipótesis, existe un par P tal que

$$P + I = p_1 \text{ e } I - P = p_2$$

de donde concluimos que

$$I = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2005
Fecha de Aceptación: 16 Marzo de 2005

Como I es impar, los números primos dados son de la forma $p_1 = 4n+1, p_2 = 4m+1$ o de la forma $p_1 = 4n-1, p_2 = 4m-1$. Por lo que

$$I = 2(m+n)+1 \textbf{ ó}$$
$$I = 2(m+n)-1$$

$\Leftarrow$) Basta hacer $P = 2(n-m)$ y el resultado se tiene.

Teorema 3. *Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *Sea $P \geq 4$ un par dado. Entonces, existe un impar I de tal manera que*

$$P + I = p_1 \textbf{ y } P - I = p_2$$

donde $p_{1,} p_2$ son números primos.

2. *Sea $P \geq 4$ un número par dado. Entonces, existen m y n números positivos tales que*

$$P = 2(m+n)$$

y números primos

$$p_1 = 4n+1, \; p_2 = 4m-1$$

Demostración

$\Rightarrow$) Notemos que

$$P = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

como P es par es claro que los primos son de la forma

$$p_1 = 4n+1, \; p_2 = 4m-1$$

Luego, $P = 2(n+m)$ y el resultado se tiene.

$\Leftarrow$) Hagamos $I = 2(n-m)+1$. Luego,

$$I + P = 2(n-m)+1+2(n+m) = 4n+1$$
$$P - I = 2(n+m)-2(n-m)-1 = 4m-1$$

Bien, se trata de demostrar una de las proposiciones de cada uno de los teoremas anteriores. Es claro que los resultados dependen del siguiente enunciado.

Teorema 4. *Sea $m \geq 4$ un entero. Existen l, q enteros positivos tales que $m = l + q$ para cada una de las siguientes situaciones:*

1. $4l+1, \; 4q+1$ *son números primos.*
2. $4l-1, \; 4q-1$ *son números primos.*
3. $4l-1, \; 4q+1$ *son números primos.*

Demostración.

El resultado es cierto para 4,5,… supongamos que el resultado se cumple para *m*. Deben existir *l, q* tales que

$$m + 1 = l + q$$

Como $l \leq m, q \leq m$ existen enteros r, s tales que $l + r = m, q + s = m$ y por la hipótesis de inducción pueden escogerse de tal forma que cumplan las condiciones del teorema y el resultado se tiene.
El teorema anterior implica los teoremas 2 y 3. Como consecuencia de esto tenemos:

Teorema 5. Goldbach-Elías. *Todo entero par mayor o igual a 4 se puede escribir como la suma de dos números primos positivos.*

Demostración.
Sabemos que todo par es de la forma $2k$, $k \in \mathrm{Z}$. Consideremos los pares de la forma $2k$ con *k* par. Por el teorema 3, existe un impar *I* tal que

$$2k = k + k = k + I + k - I = p_1 + p_2$$

donde p_1, p_2 son números primos. De igual forma si *k* es impar, existe un par *P* tal que

$$2k = k + k = k + P + k - P = p_1 + p_2$$

donde p_1, p_2 son números primos y el teorema se tiene.

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Lo importante en este artículo es ver la simplicidad con que algunos temas pueden ser tratados. Es de especial importancia, aclarar que aunque no es una demostración fantástica se muestra lo maravilloso de la Teoría de Números.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] LEVEQUE, william J. Teoría elemental de los números. Centro regional de ayuda técnica, 1968.

[2] NIVEN Ivan. Teoría de los números. Limusa Wiley, 1969.