# ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPECTROS PRIMOS DE ANILLOS CONMUTATIVOS

**RESUMEN**
*Este trabajo es una iniciación en el estudio de los espectros primos de anillos conmutativos con unidad, primero se da la definición de espectro primo y luego se estudian algunas de sus propiedades topológicas.*

**PALABRAS CLAVE**
*Anillos conmutativos, espectros, espacios topológicos.*

**ABSTRACT**
*This work is an initiation in the study of the prime conmutative rings spectrum with unit, first the definition of prime spectrum is given and then study some of their topological properties.*

**KEYWORDS**
*Conmutative rings, spectrum, topological space*

**LEONARDO PRIETO SANABRIA**
Profesor Auxiliar Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira.
lprieto@utp.edu.co

**Introducción** La noción de espectro primo de un anillo conmutativo con unidad, establece una relación entre dos grandes áreas de la matemática; el ágebra conmutativa y la topología. A partir de un anillo conmutativo con unidad se crea un espacio topológico. El objeto de este trabajo es ilustrar esta noción por medio de sencillas proposiciones las cuales muestran relaciones entre las propiedades topológicas de los espacios obtenidos y las propiedades algebraicas de los anillos dados.
Dado $A$ un anillo conmutativo con unidad (sólo trabajamos con este tipo de anillos), denotamos por $S(A)$ el conjunto de ideales primos de $A$, si $a \in A$, definimos $\hat{a}$ con la ecuación

$$\widehat{a} = \{I \in S(A) | a \notin I\}$$

**Proposición 1**
*$i)$ Si $a, b \in A$, $\widehat{ab} = \widehat{a} \cap \widehat{b}$.*
*$ii)$ $\widehat{0} = \emptyset$*
*$iii)$ $\widehat{1} = S(A)$*

Demostración. $i)$ Si $I \in ab$, entonces $ab \notin I$, por ser $I$ ideal se tiene que $a \notin I$ y $b \notin I$, luego $I \in \widehat{a} \cap \widehat{b}$. Recíprocamente, si $I \in \widehat{a} \cap \widehat{b}$, entonces $a \notin I$ y $b \notin I$, por ser $I$ primo $ab \notin I$, es decir, $I \in \widehat{ab}$. $ii)$ y $iii)$ se obtienen porque $0 \in I$ y $1 \notin I$ para todo $I \in S(A)$.
La proposición 1 nos permite definir una topología $\tau$ sobre $S(A)$, tomando como abiertos básicos los $\widehat{a}$. Llamamos espectro primo de $A$ al espacio topológico $(S(A), \tau)$ (lo denotamos generalmente con $S(A)$).

**Proposición 2** *Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos conmutativos que preserva la unidad, entonces $f^! : S(B) \rightarrow S(A)$ es una función continua entre los espectros primos $S(B)$ y $S(A)$ ($f^!$ denota la función imagen recíproca)*

*Fecha de Recibo: 01 Junio 2004*
*Fecha de Aceptacion: 23 Julio 2004*

Demostración. Primero probremos que la imagen recíproca de un ideal primo de $B$ es un ideal primo de $A$. Dado $I$ un ideal primo de $B$ se tiene que: $i)$ si $a, b \in f^!(I)$, entonces $f(a), f(b)$, por ser $I$ ideal de $B$, $f(a) - f(b) = f(a - b) \in I$, es decir, $a - b \in f^!$ entonces $f(a) \in B$ y $f(b) \in I$, como $I$ es un ideal de $B$, $f(a)f(b) = f(ab) \in I$, luego $ab \in f^!(I)$. $iii)$ $f^!$ es un ideal propio de $A$ porque $I$ es propio y $f$ preserva la unidad. $iv)$ si $ab \in f^!(I)$, $f(ab) = f(a)f(b) \in I$, por ser $I$ ideal primo, $f(a) \in I$ o $f(b) \in I$, es decir, $a \in f^!(I)$ o $b \in f^!(I)$.
Ahora veamos que $f^!$ es continua, basta ver que $(f^!)^!(\widehat{a})$ es un abierto de S$(B)$ (es decir probamos la continuidad para abiertos básicos puesto que

$$\begin{aligned}
(f^!)^!(\widehat{a})) &= \{I \in S(B) | f^!(I) \in \widehat{a}\} \\
&= \{I \in S(B) | a \notin f^!(I)\} \\
&= \{I \in S(B) | f(a) \notin I\} \\
&= \widehat{f(a)}
\end{aligned}$$

Se tiene que $(f^!)^!(\widehat{a}) = \widehat{f(a)}$ es abierto (además básico) de $S(B)$.
El radical primo de un anillo $A$ está definido por

$$rad(A) = \bigcap_{P \in S(A)} P$$

De las definiciones de $rad(A)$ y $\widehat{a}$ , se tiene que $a \in rad(A)$ si y sólo si $\widehat{a} = \emptyset$. Si $A$ es un dominio de integridad, $a = 0$ si y sólo si $\widehat{a} = \emptyset$. En un campo $A$ el único ideal primo es $\{0\}$ y la topología de su espectro primo es la única posible en un conjunto con un elemento.

**Proposición 3** *$S(A)$ es un espacio topológico $T_0$.*

Demostración. Sean $I,\ J \in S(A)$ con $I \neq J$, entonces existe $a \in$ y $a \notin J$ o $a \in J$ y $a \notin I$, en el primer caso $j \in \widehat{a}$ y $I \notin \widehat{a}$, en el segundo $I \in \widehat{a}$ y $J \notin \widehat{a}$
Un espacio topológico se llama *irreducible* si cada par de abiertos no vacíos tienen intersección no vacía.

**Proposición 4** *$S(A)$ es irreducible si y sólo si $rad(A)$ es primo.*

Demostración. Si $ab \in rad(A)$, entonces $\widehat{ab} = \widehat{a} \cap \widehat{b} = \emptyset$, bajo la hipótesis que $S(A)$ es irreducible se tiene, $\widehat{a} = \emptyset$ o $\widehat{b} = \emptyset$, es decir, $a \in rad(A)$ o $b \in rad(A)$, luego $rad(A)$ es primo. Ahora tomemos $\widehat{b} \neq \emptyset$ y $\widehat{b} \neq \emptyset$ (basta tomar abiertos básicos), como $rad(A)$ es primo, $ab \notin rad(A)$, luego $\widehat{ab} = \widehat{a} \cap \widehat{b} \neq \emptyset$
Nótese que $\widehat{a+b} \subseteq \widehat{a} \cup \widehat{b}$, pues si $I \in \widehat{a+b}$, entonces $a+b \notin I$, y por ser $I$ ideal, $a \notin I$ o $ab \notin rad(A)$, luego $I \in \widehat{a} \cup \widehat{b}$.

**Proposición 5** *$S(A)$ es un espacio compacto.*

Demostración. Si

$$S(A) = \bigcup_{a \in V \subseteq A} \widehat{a},$$

entonces no existe $I \in S(A)$ tal que $a \in I$ para todo $a \in V$ (si $a \in I$ para todo $a \in V$, entonces $I \notin \widehat{a}$ para todo $a \in V$), por tanto $< a >_{a \in V} = A$ (si $< a >_{a \in V}$ es un ideal propio existe $I$ maximal, y por tanto primo, tal que $< a >_{a \in V} \subseteq I \in S(A)$), luego $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ con $a_i \in V b_i \in A$, pero $S(A) = \widehat{1} = \widehat{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n} \subseteq \widehat{a_1 b_1} \cup \widehat{a_2 b_2} \cup \cdots \cup \widehat{a_n b_n} \subseteq \widehat{a_1} \cup \widehat{a_2} \cup \ldots \widehat{a_n} = \cup_{i=1}^{n} \widehat{a_1}$.

**Conclusión.** Las anteriores proposiciones y sus demostraciones muestran que los fundamentos del álgebra conmutativa y la topología nos permiten iniciar el estudio de los espectros primos de anillos conmutativos, en las secciones de ejercicios de [1] se presenta una serie interesante de problemas que pueden permitir al lector profundizar en este estudio.

**Bibliografía.**

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald. *Introducción al álgebra conmutativa*. Ed Reverté.

[2] P. Samuel, O. Zariski. *Conmutative Algebra*. Springer-Verlag.