

INCIDENCIA DE TAPS DIFERENTES AL NOMINAL EN MODELAMIENTO Y EN CIRCUITOS EQUIVALENTES DE TRANSFORMADORES

RESUMEN

El presente artículo muestra en forma general en sus modelos matemáticos la incidencia de taps variables tanto en el primario como en el secundario de transformadores monofásicos y trifásicos.

DARÍO ELIECER RODAS RENDÓN

Profesor titular U.T.P.

drodas@utp.edu.co

PALABRAS CLAVES: Modelamiento matricial de transformadores, de relación de transformación variable.

ABSTRACT

This paper shows the effects of variable taps in monofasic and trifasic transformers

KEYWORDS: Matricial transformer modeling, transformer variable relation.

1. INTRODUCCIÓN

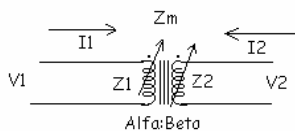


Figura 1. Transformador monofásico con taps en ambos devanados

El modelamiento matemático está orientado fundamentalmente al análisis de sistemas de potencia, para aplicaciones de flujo de carga monofásico o en distribución para flujos de carga trifásicos desbalanceados.

El modelo de un transformador monofásico se puede representar por un circuito equivalente Π considerando la rama de magnetización, similar al de una línea de transmisión. Sin embargo, se puede simplificar despreciando la impedancia de magnetización la cual es muy grande, quedando el circuito muy similar al de una línea de transmisión corta. Esta aproximación no afecta sustancialmente a los flujos de carga. Se recomienda sí contar con las pérdidas del hierro que se obtienen de pruebas de vacío y éstas se pueden modelar adicionándolas a la carga.

2. RELACIONES BÁSICAS

El transformador monofásico se ha modelado en forma de circuito equivalente y en forma matricial. De la figura 1, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_m \\ Z_m & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Donde los valores anteriores son de devanado y no de "barra o nodales". Es decir, la impedancia es primitiva: $Z_{\text{primitiva}}$ y los voltajes y corrientes son de devanado (primario y secundario).

2.1 Pruebas de Cortocircuito

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_m I_2 \quad (1)$$

$$V_2 = Z_m I_1 + Z_2 I_2 \quad (2)$$

Al realizar las pruebas de cortocircuito, corto en el secundario $V_2 = 0$, de la ecuación (2): $I_2 = -(Z_m / Z_2) I_1$ y reemplazando en (1) se obtiene:

$$V_1 = I_1 \{ [Z_1 Z_2 - (Z_m)^2] / Z_2 \}.$$

La impedancia de cortocircuito del transformador (V_1 / I_1), es:

$$Z_{tcc} = \{ [Z_1 Z_2 - (Z_m)^2] / Z_2 \}.$$

Y en consecuencia la admitancia de cortocircuito del transformador es:

$$Y_{tcc} = Z_2 / [Z_1 Z_2 - (Z_m)^2] \quad (3)$$

Las expresiones (1) a (3) son variables reales o en pu. En el caso de variables reales en (3), Y_t es la admitancia de cortocircuito referida al primario

Nota: El denominador de la expresión (3) es cercano a cero, por ello no es un procedimiento recomendable obtener la matriz Y a partir de la inversa de Z (valores

individuales de Z_1 , Z_2 y Z_m), que en rigor no se necesitan, se recomienda obtener la matriz Y a partir de la prueba de cortocircuito.

2.2 Análisis en vacío

Si el secundario está en vacío $I_2 = 0$. Al dividir (1) entre (2) e igualando a la relación de transformación:

$$V_1 / V_2 = Z_1 / Z_m = n1/n2 \quad (4)$$

Si excitáramos por el secundario y el primario estuviese en vacío $I_1 = 0$. Al dividir (1) entre (2) e igualando a la relación de transformación:

$$V_1 / V_2 = Z_m / Z_2 = n1/n2 \quad (5)$$

2.3 Otras expresiones útiles

Con algunas manipulaciones de las expresiones anteriores se obtiene:

$$(Z_1 / Z_2) = (n1/n2)^2 \quad (6)$$

$$Z_m / [Z_1 Z_2 - (Z_m)^2] = Y_t (n1/n2) \quad (7)$$

$$Z_1 / [Z_1 Z_2 - (Z_m)^2] = Y_t (n1/n2)^2 \quad (8)$$

La matriz Y primitiva (Y_p), es la inversa de la Z primitiva (Z_p).

$$\text{Donde } Z_p = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_m \\ Z_m & Z_2 \end{bmatrix}$$

Al invertirla:

$$[Y_p] = \{1/[Z_1 Z_2 - (Z_m)^2]\} \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_m \\ -Z_m & Z_1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las ecuaciones (3), (7) y (8) se obtiene:

$$[Y_p] = \begin{bmatrix} Y_t & -Y_t(n1/n2) \\ -Y_t(n1/n2) & Y_t(n1/n2)^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

3 MODELO MATEMÁTICO GENERAL PARA TRANSFORMADOR MONOFÁSICO

En variables reales ($n1/n2$) toma valores muy lejanos de uno Ej: 13200/220. En pu ($n1/n2$) toma cada uno valores próximos a la unidad así: 0.90/1.05.

En adelante el análisis se hará todo en por unidad.

A valores nominales (taps en sus posiciones nominales tanto del primario como del secundario) se hacen pruebas

de cortocircuito y se obtiene la admitancia nominal del transformador: $Y_{t \text{ nominal}}$.

3.1 Incidencia en la impedancia

En transformadores de potencia, $Z \approx X$, al variar taps las impedancias se modifican según sea el nuevo número de espiras y en forma cuadrática, pues la inductancia es función del número de espiras al cuadrado.

Así:

$$Z_{1 \text{ nuevo}} = \alpha^2 Z_{1 \text{ nom}}$$

$$Z_{2 \text{ nuevo}} = \beta^2 Z_{2 \text{ nom}}$$

$$Z_m \text{ nuevo} = \alpha\beta Z_m \text{ nom}$$

Lo anterior es válido en pu conservando los valores base de Z base nominales

Donde α y β se pueden apreciar en la Figura 1 y son valores cercanos a la unidad pues estamos en pu

La nueva admitancia del transformador será:

$$Y_{t \text{ nueva}} = Z_{2 \text{ nueva}} / [Z_{1 \text{ nueva}} Z_{2 \text{ nueva}} - (Z_m \text{ nueva})^2]$$

$$Y_{t \text{ nueva}} = \beta^2 Z_{2 \text{ nom}} / [(\alpha^2 Z_{1 \text{ nom}})(\beta^2 Z_{2 \text{ nom}}) - \alpha^2 \beta^2 (Z_m \text{ nom})^2]$$

$$Y_{t \text{ nueva}} = Z_{2 \text{ nom}} / \{\alpha^2 [Z_{1 \text{ nom}} Z_{2 \text{ nom}} - (Z_m \text{ nom})^2]\}$$

Según (3):

$$Y_{t \text{ nueva}} = Y_{t \text{ nom}} / \alpha^2 \quad (10)$$

3.2 Incidencia total en Y primitiva

Con la ecuación (9) se puede obtener la nueva Y primitiva para taps diferentes al nominal. Si se reemplaza Y_t por $Y_{t \text{ nueva}}$ y además $n1/n2 = \alpha / \beta$.

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{t \text{ nueva}} & -Y_{t \text{ nueva}}(\alpha / \beta) \\ -Y_{t \text{ nueva}}(\alpha / \beta) & Y_{t \text{ nueva}}(\alpha / \beta)^2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando el $Y_{t \text{ nueva}}$ según ecuación (10):

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{t \text{ nominal}} / \alpha^2 & -Y_{t \text{ nominal}} / \alpha\beta \\ -Y_{t \text{ nominal}} / \alpha\beta & Y_{t \text{ nominal}} / \beta^2 \end{bmatrix}$$

Obviando en adelante el término nominal:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_t / \alpha^2 & -Y_t / \alpha\beta \\ -Y_t / \alpha\beta & Y_t / \beta^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

4 MODELAMIENTO DE TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS

Un transformador trifásico se modela en términos de submatrices y con taps en su posición nominal, de la siguiente manera:

$$[Y_{bus}] = \begin{bmatrix} Y_{pp} & Y_{ps} \\ Y_{sp} & Y_{ss} \end{bmatrix}$$

Donde:

Y_{pp} : submatriz (3x3), correspondiente al primario.
 Y_{ss} : submatriz (3x3), correspondiente al secundario.
 Y_{ps} y Y_{sp} : submatrices(3x3), de primario – secundario y secundario – primario respectivamente.

Fácilmente se puede demostrar aplicando de manera similar el procedimiento anterior que ante taps diferentes al nominal la nueva matriz Y es:

$$[Y_{bus}] = \begin{bmatrix} Y_{pp}/\alpha^2 & Y_{ps}/\alpha\beta \\ Y_{sp}/\alpha\beta & Y_{ss}/\beta^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

5 TRANSFORMADOR MONOFÁSICO. REPRESENTACIONES EN CIRCUITOS EQUIVALENTES

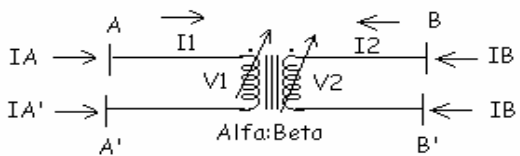


Figura 2. Transformador monofásico y sus cuatro nodos.

Los circuitos equivalentes se recomienda obtenerlos de la matriz admitancia de barras Y bus.

5.1 Circuito equivalente de trafo monofásico de 2 nodos

En principio se tienen 4 nodos, pero si los terminales A' y B' se llevan a tierra (nodo de referencia), el sistema queda con 2 nodos A y B y en este caso $V_A = V_1$ y $V_B = V_2$, Voltajes nodales iguales a los de devanado, la Y bus en este caso queda igual a la Y primitiva.

$$[Y_{bus}] = \begin{bmatrix} A & B \\ Yt/\alpha^2 & -Yt/\alpha\beta \\ -Yt/\alpha\beta & Yt/\beta^2 \end{bmatrix}$$

Como $Y_{AB} = Y_{BA}$, se puede representar por un circuito equivalente el cual es:

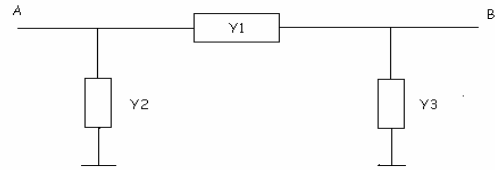


Figura 3. Circuito equivalente para un transformador de 2 nodos.

Donde: $Y1 = Yt/\alpha\beta$
 $Y2 = Yt/\alpha^2 - Yt/\alpha\beta$
 $Y3 = Yt/\beta^2 - Yt/\alpha\beta$

Del circuito general anterior se pueden desprender los casos particulares:

- Tap solo variable en el primario: $\beta = 1$ y $\alpha \neq 1$
 $Y1 = Yt/\alpha$
 $Y2 = Yt(1-\alpha)/\alpha^2$
 $Y3 = Yt(\alpha-1)/\alpha$
- Tap solo variable en el secundario $\alpha = 1$ y $\beta \neq 1$.

$Y1 = Yt/\beta$
 $Y2 = Yt(\beta-1)/\beta$
 $Y3 = Yt(1-\beta)/\beta^2$

5.2 Otra representación de transformadores monofásicos de 2 nodos

En ocasiones algunos autores representan el transformador con tap variable (en un solo lado), como la combinación de un transformador con la relación adecuada: $\alpha:1$ o $1:\beta$, y en serie la admitancia en pu de Yt , sin embargo la colocación de Yt la hacen en forma indistinta, entre el mismo lado donde se encuentra el variador o el lado opuesto a el. Se dan entonces las siguientes alternativas:

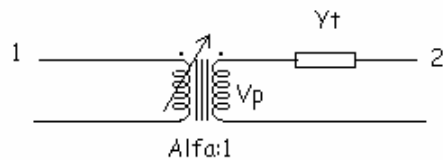


Figura 4

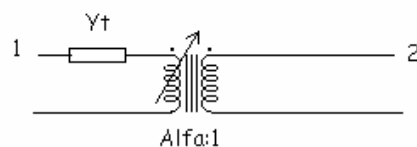


Figura 5

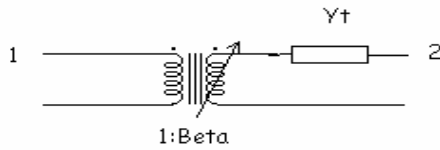


Figura 6

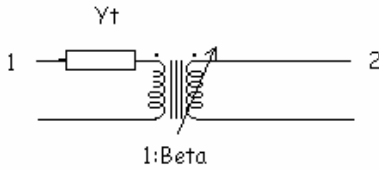


Figura 7

De la figura 4 se obtiene:

$$V_1 / V_p = \alpha \quad \text{y} \quad I_1 / I_2 = -1/\alpha$$

$$I_2 = (V_2 - V_1/\alpha)Y_t = -Y_t/\alpha V_1 + Y_t V_2$$

$$I_1 = -I_2/\alpha = Y_t/\alpha^2 V_1 - Y_t/\alpha V_2$$

Reordenando y expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_t/\alpha^2 & -Y_t/\alpha \\ -Y_t/\alpha & Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Este resultado esta de acuerdo con la ecuación (11) para $\beta = 1$.

Si se repite el procedimiento CIRCUITAL a la figura 5 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_t & -\alpha Y_t \\ -\alpha Y_t & \alpha^2 Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

La matriz Y no coincide con la de la expresión (11).

Parece ser que colocar Y_t al mismo lado del variador de taps no arroja resultados completamente correctos.

Repitiendo el procedimiento para las figuras 6 y 7 se obtienen las siguientes matrices Y:

Para la figura 6:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \beta^2 Y_t & -\beta Y_t \\ -\beta Y_t & Y_t \end{bmatrix}$$

Para la figura 7:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_t & -Y_t/\beta \\ -Y_t/\beta & Y_t/\beta^2 \end{bmatrix}$$

De nuevo al comparar con la ecuación (11), con $\alpha = 1$, se observa que la figura 7 es la más adecuada.

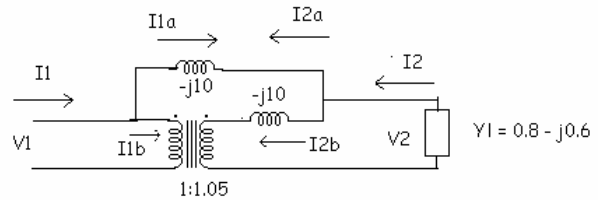
Conclusión. Cuando se opta por este tipo de representación circuital se deberá colocar la admitancia del transformador al **lado opuesto** del variador de taps . La confusión se puede presentar cuando se argumenta que la impedancia en pu de un transformador es indiferente colocarla a uno u otro lado del transformador. La explicación a esto es que la Y en pu cuando el taps es diferente del nominal ya no es igual en el primario y en el secundario y por ello no es arbitraria dicha colocación.

5.3 Ejercicio

Dos transformadores en paralelo con $X_{cc} = 0.1$ pu cada uno, alimentan una impedancia de carga de 1 pu y factor de potencia 0.8 en atraso. El transformador "a" esta en su tap nominal y el transformador "b" tiene una relación 1:1.05. Analizar cuando el voltaje en la carga = 1 $\angle 0^\circ$.

Solución

Se resuelve de 2 maneras: circuital no recomendada y matricial con ecuación (11).



Obsérvese que Y esta del mismo lado del cambiador de tap (no recomendable).

En ambos casos:

$$Y_t = 1/j0.1 = -j10$$

Obtener: Y_{ta} , Y_{tb} , Y_{total} :

$$[Y_{ta}] = \begin{bmatrix} -j10 & j10 \\ j10 & -j10 \end{bmatrix}$$

Para la no recomendable:

$$[Y_{tb}] = \begin{bmatrix} -j11.025 & j10.5 \\ j10.5 & -j10 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{total}] = \begin{bmatrix} -j21.025 & j20.5 \\ j20.5 & -j20 \end{bmatrix}$$

Con el voltaje en la carga y la impedancia se obtiene la corriente total I2.

Con la segunda fila de Itotal (I2), Itotal = Ytotal *V. se despeja V1. Conocidos los 2 voltajes se conoce la matriz [V]. Se calculan entonces las corrientes de los 2 transformadores:

$$[I_{ta}] = [Y_{ta}] * [V] \text{ e } [I_{tb}] = [Y_{tb}] * [V].$$

Complementariamente se pueden sacar las potencias complejas de entrada y salida de cada transformador, así como la potencia compleja en la carga y la que tiene que entregar la fuente.

El procedimiento se repitió con el método recomendado es decir con:

$$[Y_{tb}] = \begin{bmatrix} -j10 & j9.5238 \\ j9.5238 & -j9.0703 \end{bmatrix}$$

Los resultados obtenidos con uno y otro método son:

Variable	No recomendable	Recomendable
I2	-0.8+j0.6	-0.8+j0.6
V1	1.005+j0.039	1.0075+j0.041
I1a	0.39-j0.049	0.41-j0.075
I2a	-0.39+j0.049	-0.41+j0.075
I1b	0.43-j0.58	0.41-j0.551
I2b	-0.41+j0.55	-0.39+j0.525
Sta in	0.39+j0.064	0.41+j0.092
Sta out	0.39+j0.049	0.41+j0.075
Stb in	0.41+j0.598	0.39+j0.572
Stb out	0.41+j0.551	0.39+j0.525
St carga	0.8+j0.6	0.8+j0.6
St fte	0.8+j0.663	0.8+j0.6646

Se observan diferencias en la regulación (0.57% vs 0.87%), la potencia activa que llega a la carga es la misma que sale de la fuente sin embargo se nota que la contribución en potencia activa de cada transformador se cambia, igualmente las diferencias sustanciales entre los transformadores se dan a nivel de la potencia reactiva.

5.4 TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS CON MÁS DE 2 NODOS

En el caso anterior de 4 nodos pasamos a 2 al colocar 2 de ellos conectados a tierra o referencia. Hay ocasiones en los cuales A' se une a B' pero no se aterriza en este caso llegaríamos también a una matriz Y bus de 3x3. (A-A'-B). Igualmente si A' es el único terminal que se aterriza, tendríamos una matriz Y bus de 3x3 (A - B - B').

Si ninguno de los 4 terminales se une a referencia se tiene:

$$\begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} VA \\ VA' \\ VB \\ VB' \end{bmatrix}$$

La matriz que premultiplica los voltajes nodales se denomina [N].

De la teoría de sistemas de potencia se tiene:

$$Y_{bus} = [N^t] [Y \text{ primitiva}] [N]$$

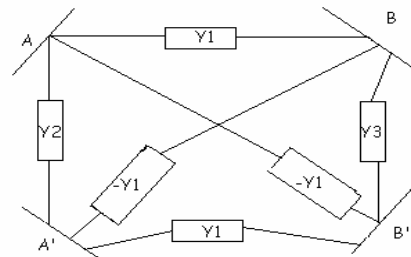
Ybus =

$$\begin{bmatrix} Y_t/\alpha^2 & -Y_t/\alpha^2 & -Y_t/\alpha\beta & Y_t/\alpha\beta \\ -Y_t/\alpha^2 & Y_t/\alpha^2 & Y_t/\alpha\beta & -Y_t/\alpha\beta \\ -Y_t/\alpha\beta & Y_t/\alpha\beta & Y_t/\beta^2 & -Y_t/\beta^2 \\ Y_t/\alpha\beta & -Y_t/\alpha\beta & -Y_t/\beta^2 & Y_t/\beta^2 \end{bmatrix}$$

El orden para las filas y columnas es:

A-A'-B-B'.

Si se desea se podría obtener un circuito equivalente para este transformador:



Donde:

$$Y1 = Y_t/\alpha\beta; Y2 = Y_t/\alpha^2; Y3 = Y_t/\beta^2$$

6 TRANSFORMADORES MEDIANOS Y PEQUEÑOS

6.1 Modelamiento teórico

En estos transformadores la impedancia del transformador (a diferencia de los transformadores de potencia en los cuales $X \gg R$), la Resistencia es comparable con el valor de la reactancia y no se podrá despreciar.

Basados en el siguiente razonamiento: La reactancia es directamente proporcional al número de espiras al cuadrado, pero la resistencia es directamente proporcional al número de espiras, dado que la resistencia depende en forma lineal con la longitud del conductor del devanado.

$$\begin{aligned} Z_{1nuevo} &= \alpha R_{1nominal} + j \alpha^2 X_{1nominal} \\ Z_{2nuevo} &= \beta R_{2nominal} + j \beta^2 X_{2nominal} \\ Z_{mnuevo} &= (\alpha\beta)^{1/2} R_{mnominal} + j (\alpha\beta) X_{mnominal} \end{aligned}$$

Reemplazando en (3) para obtener la nueva Y_t del transformador se obtiene:

$$Y_{tnueva} = G_{nueva} + jB_{nueva}$$

Donde:

$$\begin{aligned} G_{nueva} &= \{ C_2 (R_{2nominal}/\beta) + D_2 X_{2nominal} \} / \{ \alpha^2 (C_2^2 + D_2^2) \} \\ B_{nueva} &= \{ C_2 X_{2nominal} - D_2 (R_{2nominal}/\beta) \} / \{ \alpha^2 (C_2^2 + D_2^2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= (R_{1nom} R_{2nom} - R_{mnom}^2) / \alpha\beta - X_{1nom} X_{2nom} + X_{mnom}^2 \\ D_2 &= X_{1nom} R_{2nom} / \beta - 2R_{mnom} X_{mnom} / (\alpha\beta)^{1/2} + R_{1nom} X_{2nom} / \alpha \end{aligned}$$

A valores nominales y tomando en cuenta la parte resistiva de la impedancia del transformador se obtiene:

$$Y_{tnominal} = G_{nominal} + jB_{nominal}$$

Con

$$\begin{aligned} G_{nom} &= \{ C R_{2nominal} + D X_{2nominal} \} / \{ (C^2 + D^2) \} \\ B_{nominal} &= \{ C X_{2nominal} - D (R_{2nominal}) \} / \{ (C^2 + D^2) \} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} C &= R_{1nom} R_{2nom} - R_{mnom}^2 - X_{1nom} X_{2nom} + X_{mnom}^2 \\ D &= X_{1nom} R_{2nom} - 2R_{mnom} X_{mnom} + R_{1nom} X_{2nom} \end{aligned}$$

En el caso de transformadores de potencia, el variar taps no implicaba un cambio total, en ellos se puede extrapolar lo que le pasa al transformador en condiciones nominales y obtener la nueva matriz Y sin necesidad de realizar nuevas pruebas. En este caso la G_{nueva} ni la B_{nueva} son fáciles de relacionarlas con la $G_{nominal}$ ni la $B_{nominal}$, y requeriría contar con muchos valores nominales de resistencias y reactancias individuales.

Para solucionar esto se recomienda contar con una prueba adicional de cortocircuito para la relación: α/β bajo estudio. Si las mediciones las realiza en el primario, obtendrá Y_{nueva} en siemens, al dividirla entre la Y_{base} nominal se obtendrá la Y_{nueva} en pu. Finalmente:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{nueva} & -Y_{nueva}(\alpha/\beta) \\ -Y_{nueva}(\alpha/\beta) & Y_{nueva}(\alpha/\beta)^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Para transformadores trifásicos:

Partiendo de la Y primitiva para el transformador monofásico se obtiene una Y primitiva de 6x6, como banco, luego con la matriz de conexión particular del transformador trifásico se obtendrá la Y_{bus} .

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología que permite con el mínimo de datos posibles (una prueba de cortocircuito), adecuar nuestros modelos de transformadores monofásicos (Exp. 11), o trifásicos (Exp 12), en el caso bien general de tener taps variables tanto en el primario como en el secundario.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] CHEN, T,H; CHANG, J.D. Open wye – open delta and open delta – open delta transformer models for rigorous distribution system analysis. IEE Proceedings – c, Vol 139, No 3 May 1992.
- [2] CHENG, Tsai – Hsiang; CHEN, Mo – Shing, KOTAS, Paul; CHEBLI, Elie A. Three – phase cogenerator and transformer models for distribution system analysis. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol 6, No 4, Octubre 1991.
- [3] GRAINGER, John J; STEVENSON JR, William D. Análisis de Sistemas de Potencia. Edit. M^c Graw – Hill. 1995.
- [4] KRAUSE, Paul C. Analysis Of Electric Machinery. Edit. M^c Graw – Hill
- [5] GALLEGO, Ramón; RODAS, Darío. Estudio de Modelos Matemáticos de Transformadores de Distribución. Seminario Nacional de Actualización en Transformadores. Aciem – Utp. Pereira 1994
- [6] Michael J. Gorman, Jhon J. Grainger "Transformer Modelling for Distribution System Studies, Part I: Linear Modelling Basics, Part II: Addition of Models to Ybus and Zbus", Electric Power Research Center, North Carolina, July 1991.
- [7] Turan Gönen, "Electric power distribution system engineering", McGraw Hill, 1.986.