Scientia et Technica Año XVII, No 51, Agosto de Año 2012. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701

EL AREA DEL PARALELOGRAMO Y POLIGONOS INSCRITOS

THE AREA OF THE PARALLELOGRAM AND INSCRIBED POLYGONS

Campo Elías González Pineda, Sandra Milena García
Facultad de Ciencias Básica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
cegp@utp.edu.co
tazyotas@utp.edu.co

***Resumen*— El área del paralelogramo vista desde la Geometría Vectorial, trae consecuencias interesantes, una de ellas es la de los polígonos regulares inscritos en polígonos regulares. En este artículo mostramos una fórmula muy sencilla para calcular la suma de las áreas de los polígonos regulares inscritos y además, damos una fórmula para calcular la apotema de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio r.**

***Palabras claves*— Paralelogramo, área, polígono inscrito.**

***Abstract--* The area of the parallelogram geometry seen from Vector brings interesting consequences; one is the regular polygons inscribed in regular polygons. In this article we show a simple formula to calculate the sum of the areas of regular polygons inscribed and also give a formula for calculating the apothem of a regular polygon inscribed in a circle of radius r.**

***Keywords*— Parallelogram, area, inscribed polygon.**

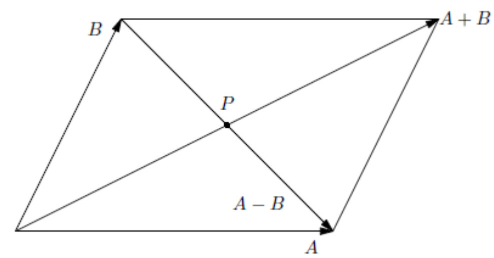
I. INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiamos algunas consecuencias que se derivan del área del paralelogramo en relación con el área de algunas figuras planas. Sean A, B puntos de R^n . El vector dirigido con punto inicial A y final B lo denotamos $\overrightarrow{AB}$, además $\overrightarrow{AB} = B - A$. En este artículo utilizamos el producto interno usual de R^n. Cuando hablemos del vector o lado A debe entenderse un vector dirigido y no un punto.

El resultado básico viene dado por:

Teorema 1. El área del paralelogramo de lados A, B viene dada por

$$S = \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2} \qquad (1)$$



La justificación de este resultado puede consultarse en cualquier libro de álgebra vectorial ver [10].
Inmediatamente se deduce

Corolario 2. El área de triángulo de lados A y B viene dada por

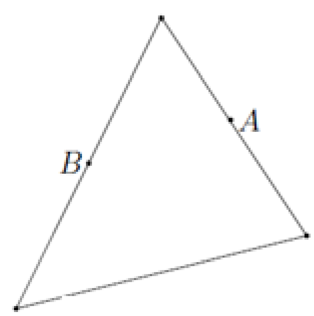


Figura 1

$$A_\Delta = \frac{\sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2}}{2}$$

Estudiamos ahora algunos ejemplos particulares que se deducen del teorema anterior. Quizá una consecuencia no geométrica es la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que se obtiene del radicando en la ecuación (1).

Ejemplo 1. Consideremos el triángulo de vértices A, B y C (el cual indicamos con el símbolo ΔABC). Sean M, N puntos tales que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CN} = r\overrightarrow{CB}$ con $0 < r, t < 1$ entonces, el área de ΔMNC, la cual denotamos $a(\Delta\, MNC)$ viene dada por

Fecha de Recepción: 05 de Agosto de 2011
Fecha de Aceptación: 28 de Agosto de 2012

$a(\Delta MNC) = rta(\Delta ABC)$

Demostración. Nótese que:
$\|\overrightarrow{CM}\| = r\|\overrightarrow{CA}\|, \|\overrightarrow{CN}\| = t\|\overrightarrow{CB}\|$

Por lo que
$\|\overrightarrow{CM}\|^2 \|\overrightarrow{CN}\|^2 = r^2t^2\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|$

También $(\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN})^2 = r^2t^2(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2$, restando y sacando raíz cuadrada obtenemos el resultado. Nótese que
$r = \frac{a}{l_1}, t = \frac{b}{l_2}, \quad l_1 = \|\overrightarrow{CA}\|, l_2 = \|\overrightarrow{CB}\|$

En particular si $r = t$ se tiene
$a(\Delta MNC) = t^2 a(\Delta ABC)$

Si $t = \frac{1}{2}$ entonces,

$$a(\Delta MNC) = \frac{a(\Delta ABC)}{4}$$

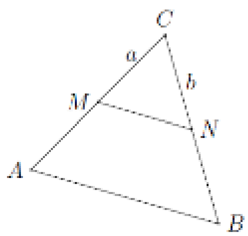


Figura 2

Nótese que $0 < t < 1$. Si el triángulo es isósceles es decir, $l_1 = l_2 = r$ vemos que
$$a(\Delta MNC) = t^2 a(\Delta ABC) = \frac{a^2}{r^2} a(\Delta ABC)$$

II. Polígonos regulares inscritos

Consideremos ahora la situación presentada en la figura con las siguientes hipótesis.

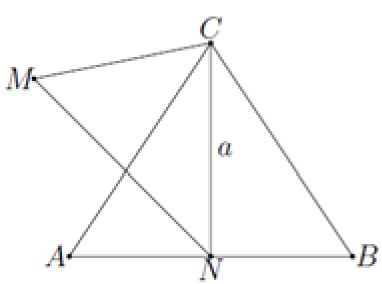


Figura 3

1. $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = r$
2. $\|\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{CN}\|$.
3. $\angle MCN = \angle ACB$.
4. a es la altura del triangulo ABC

Es decir, los triángulos son semejantes. Haciendo coincidir los ángulos $\angle MCN$ y $\angle ACB$ nos conduce a la situación mencionada antes, solo que esta vez involucra triángulos isósceles.

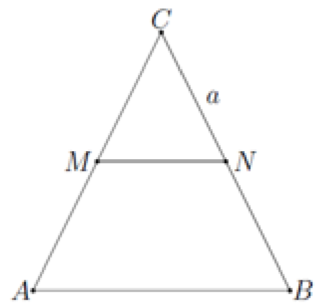


Figura 4

Así, tenemos por la parte anterior que
$$a(\Delta MNC) = \frac{a^2}{r^2} a(\Delta ABC)$$

Consideremos ahora un pentágono e inscribamos en él otro pentágono uniendo los puntos medios de los lados consecutivos. Nuestro propósito es encontrar la relación entre las áreas de los polígonos

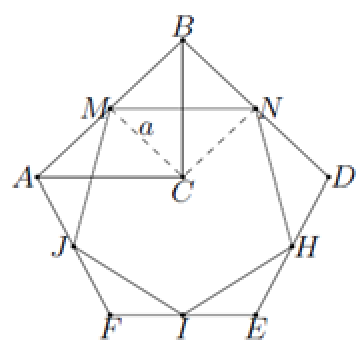


Figura 5

$P_5 = P(ABCDEF)$ y $I_5 = I(MNHIJ)$

Por geometría elemental sabemos que
$$A(P_5) = \frac{5a\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = 5a(\Delta ABC)$$

También $A(I_5) = 5a(\Delta MNC)$. Por el resultado anterior $a(\Delta MNC) = \frac{a^2}{r^2}(\Delta ABC)$. Es decir,

$$A(I_5) = 5\frac{a^2}{r^2}a(\Delta ABC) = \frac{a^2}{r^2}A(P_5)$$

Como esta situación es general, podemos considerar el polígono regular de n lados P_n e I_n el polígono regular inscrito de n lados uniendo los puntos medios de los lados consecutivos de P_n y encontramos

$$a(I_n) = \frac{a^2}{r^2}a(P_n)$$

Donde a es el apotema que será $0 < a < r$.

Como los triángulos que se obtienen de un polígono regular son congruentes el ángulo del vértice central es $\frac{2\pi}{n}$.

Consideremos las siguientes consecuencias obtenidas de las figuras.

1. $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{l/2}{a} = \frac{l_1/2}{h_1} \rightarrow l_1 = \frac{l}{a}h_1 = \frac{la}{r} \rightarrow h_1 = \frac{a^2}{r}$
2. $a = r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),\ \ l = 2rsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$

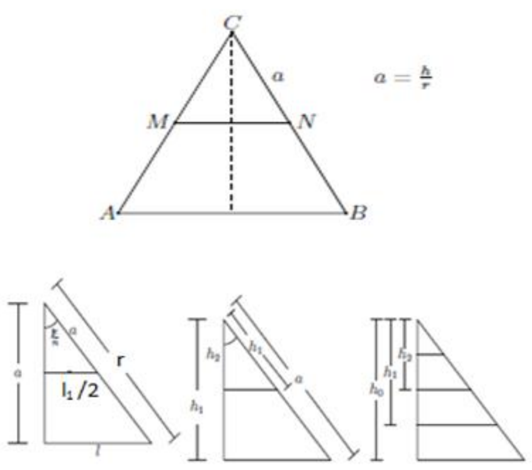


Figura 6

3. Como $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_1}{a} \rightarrow h_2 = \frac{h_1^2}{a} = \frac{a^4}{r^2}\frac{1}{a} = \frac{a^3}{r^2}$
4. Siguiendo el proceso encontramos
$$h_k = \frac{a^{k+1}}{r^k} = a\left(\frac{a}{r}\right)^k, k = 0, 1, \ldots$$
5. $l_1 = \frac{a}{r}l$
6. Es fácil ver que $l_2 = \frac{h_2}{h_1}l_1 = \frac{a^3}{r^2}\frac{r}{a^2}\frac{la}{r} = \frac{a^2}{r^2}l$
7. En general $l_k = \frac{a^k}{r^k}l,\ k = 0, 1, 2, \ldots$
8. Ahora:

$$A_k = \frac{h_k l_k}{2} = \frac{a^{2k+1}}{2r^{2k}}l = \left(\frac{a^2}{r^2}\right)^k \frac{al}{2} = \left(\frac{a^2}{r^2}\right)^k A_0$$

donde A_k es el área del k-esimo rectángulo y $A_0 = \frac{al}{2}$

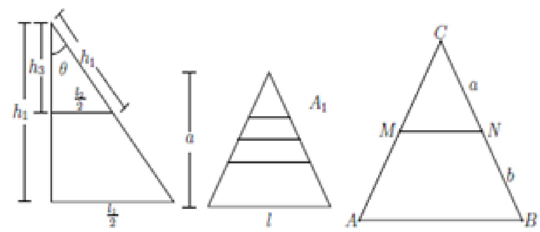


Figura 7

9. Nótese que
$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)^k = A_0\frac{1}{1-\frac{a^2}{r^2}}$$

10. El área de $P_n = nA_0$ y de $I_n = nA_n$ por tanto la suma de las áreas de todos los polígonos inscritos es
$$S = n\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \frac{nA_0}{1-\frac{a^2}{r^2}},\ \ I_0 = P_n \qquad (2)$$

11. La relación del área P_n con el primer polígono inscrito ${}_1I_n$, se obtiene de $A({}_1I_n) = n\frac{a^2}{r^2}A_0$. Luego,
$$\frac{A(P_n)}{A({}_1I_n)} = \frac{nA_0}{n\frac{a^2}{r^2}A_0} = \frac{r^2}{a^2}$$

Es decir
$$\frac{a^2}{r^2}A(P_n) = A({}_1I_n)$$

El cálculo del apotema como se vio, es relativamente fácil dado por la fórmula

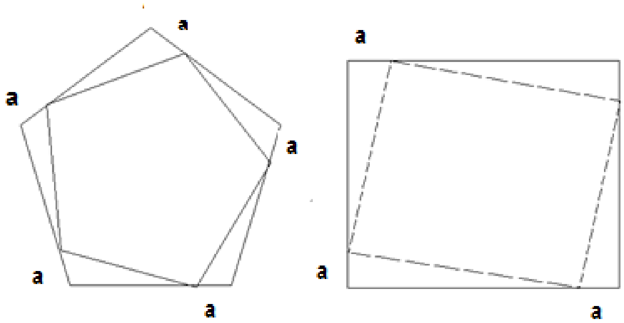
$$a = rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Donde r es el radio del círculo y n es el número de lados del polígono regular. Como $l = 2rsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ vemos que la suma S dada en (2) puede encontrarse fácilmente por la fórmula

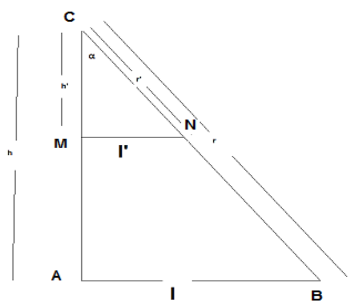
$$S = nr^2cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Obsérvese que si n tiende a infinito $S = \pi r^2$

En general si P_n es el polígono regular de n-lados y lado l y unimos los puntosque están a una distancia a de cada vértice en los lados consecutivos obtenemos un polígono I_n inscrito regular en P_n de lado l'. Como se ilustra en la figura



Si $A(P_n)$ es el área del polígono P_n y $A(I_n)$ es el área del polígono I_n.



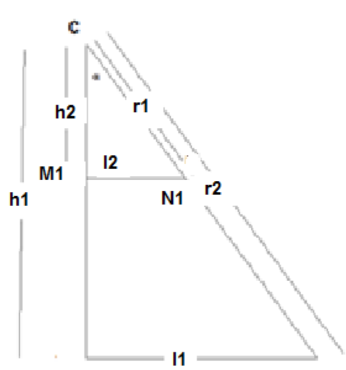
De la figura vemos que:

$$\tan\theta = \frac{l}{h} = \frac{l_1}{h_1} \to h_1 = \frac{h}{l} l_1$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1} \to l_1 = \frac{l}{r} r_1$$

Es decir, $h_1 = \frac{h}{r} r_1$ y así $2A(\Delta MNC) = h_1 l_1 = \frac{hl}{r^2} r_1^2$.

Claramente la distancia α debe decrecer de manera adecuada en el proceso. Continuando encontramos :



$$2A(\Delta M_1 N_1 C) = \frac{h_1 l_1}{r_1^2} r_2^2$$

Pero $h_1 l_1 = \frac{hl}{r^2} r_1^2$ por lo que

$$2A(\Delta M_1 N_1 C) = \frac{hl}{r^2} r_1^2$$

Continuando el proceso encontramos

$$h_k = \frac{h}{l} r_k, l_k = \frac{l}{r} r_k \longmapsto h_k l_k = \frac{hl}{r^2} r_k^2$$

O también $A_k = \frac{A_0}{r^2} r_k^2$, $A_0 = hl$. Si reemplazamos $r_k = \frac{r}{h} h_k$ obtenemos

$$A_k = \frac{l}{h} h_k^2 = \frac{A_0}{h^2} h_k^2$$

Sumando encontramos

$$S = \frac{A_0}{r^2}\left[\frac{1}{1-r_k}\right] = \frac{A_0}{h^2}\left[\frac{1}{1-h^2}\right]$$

III. CONCLUSIONES

El uso de los vectores ayuda a encontrar resultados generales de la Geometría Euclidiana que serían difíciles de calcular de otra forma. La Geometría Vectorial es una herramienta poderosa para tratar temas generales de la Geometría Analítica, dando procedimientos analíticos que pueden con algo de astucia generalizar de una manera extraordinaria resultados que de otra forma no se podrían calcular. En particular el área del paralelogramo, tiene consecuencias maravillosas, una de las mencionadas en [9] y en [10] es la desigualdad de Cauchy-Schwartz. En [10] pueden verse otros resultados alusivos al área del paralelogramo.

REFERENCIAS

[1]. Juan A. Viedma. Introducción a la Geometría Analítica. Editorial Norma 1962

[2]. Agustín Anfossi. Geometría Analítica. Editorial progreso. 1949

[3]. Paul. R. Rider. Geometría Analítica. Montaner y Simon. 1962

[4]. Charles Wexler. Geometría Analítica. Un enfoque Vectorial. Montaner y Simon. 1968

[5]. Charles H. Lehmann. Geometría Analítica. Unión Tipográfica Hispano Americana. 1968

[6]. Apostol M. Tom. Calculus Vol .I. edit Reverté 1973

[7]. Edgar Obonaga, Jorge A. Pérez, Víctor E. Castro. Matemática 3 Y 4 Álgebra y Geometría. PIME EDITORES. 1984

[8]. Edgar Obonaga, Jorge A. Pérez, Víctor E. Castro. Matemática 5 Trigonometría y Geometría Analítica. PIME EDITORES. 1984

[9]. Nieto Rubén Darío, Algebra Vectorial. Universidad del Valle 1997

[10]. Campo Elías González Pineda. Geometría Vectorial. Universidad Tecnológica de Pereira 2009.