Área del paralelogramo y áreas relacionadas

Area of the parallelogram and related areas

Campo Elias Gonzalez Pineda, Sandra Milena Garcia
Faculta de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológico de Pereira, Pereira, Colombia
cegp@utp.edu.co
tazyotas@utp.edu.co

***Resumen*— El área del paralelogramo tiene consecuencia interesantes en relación con algunas de figura inscrita en él y en triángulos. En este artículo mostramos algunas de esas relaciones especiales.**

***Palabras Claves*— paralelogramo, triángulo, cuadrilátero, área**

***Abstract*— The area of the parallelogram has interesting consequences in relation to some of ye entered in the triangles. In this article we show some of these special relationships**

***Keywords*— Parallelogram, triangle, quadrilateral, area.**

I. INTRODUCIÓN

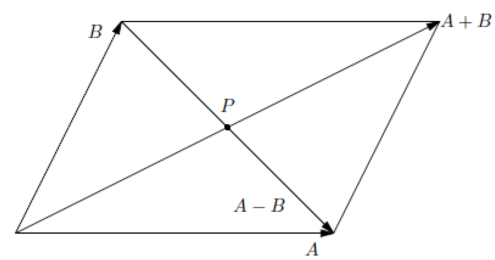
En este artículo estudiamos algunas consecuencias que se derivan del área del paralelogramo en relación con el área de algunas figuras planas. Sean A, B puntos de R^n . El vector dirigido con punto inicial A y final B lo denotamos $\overrightarrow{AB}$, además $\overrightarrow{AB} = B - A$. El vector nulo o cero lo denotamos O. En este artículo utilizamos el producto interno usual de R^n. Cuando hablemos del vector o lado A debe entenderse un vector dirigido y no un punto. La expresión L.I significa linealmente independiente.

Fecha de Recepción: 08 de Septiembre de 2011
Fecha de Aceptación: 20 Diciembre de 2011

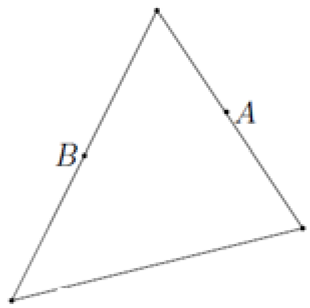
El resultado básico viene dado por:

Teorema 1. El área del paralelogramo de lados A, B viene dada por

$$S = \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2} \qquad (1)$$



La justificación de este resultado puede consultarse en cualquier libro de álgebra vectorial ver [10]. Se deduce entonces que el área de triángulo de lados A y B viene dada por



$$A_{\Delta} = \frac{\sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A\cdot B)^2}}{2}$$

II. CONTENIDO.

A. Resultado básico. Consideremos dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ y vectores X, Y que satisfacen la relación (por comodidad $\|X\| = X^2, \|Y\| = Y^2$)

$$X = aA + bB$$

$$Y = cA + dB$$

Entonces,

$$X^2 = a^2A^2 + 2ab\ A\cdot B + b^2B^2$$

$$Y^2 = c^2A^2 + 2cd\ A\cdot B + d^2B^2$$

$$X^2Y^2 = a^2\ c^2A^4 + 2abc^2(A\cdot B)A^2 + b^2c^2A^2B^2$$
$$+2cda^2(A\cdot B)A^2 + 4abcd\,(A\cdot B)^2$$
$$+ 2cd\,b^2(A\cdot B)B^2$$
$$+a^2d^2A^2B^2 + 2abd^2(A\cdot B)B^2 + b^2d^2B^4$$

De otro lado:

$$X\cdot Y = acA^2 + (ad+cb)(A\cdot B) + bdB^2$$

$$(X\cdot Y)^2 = a^2c^2A^4 + (ad+cb)^2(A\cdot B)^2 + b^2d^2B^4$$
$$+2ac(ad+bc)(A\cdot B)A^2 + 2abcdA^2B^2$$
$$+2bd(ad+bc)(A\cdot B)B^2$$

Luego,

$$X^2Y^2 - (X\cdot Y)^2 = (ad-bc)^2(A^2B^2 - (A\cdot B)^2)$$

En términos de norma tenemos

$$\|X\|^2\|Y\|^2 - (X\cdot Y)^2 = (ad-bc)^2(\|A\|^2\|B\|^2 - (A\cdot B)^2) \quad (2)$$

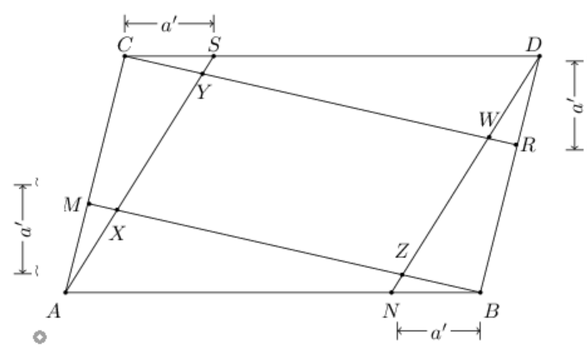
Para denotar el área de un polígono de vértices (o n lados) digamos $a_1, a_2, \dots, a_n$ escribimos $A_{a_1a_2\dots a_n}$

En términos de área la fórmula (2) se escribe

$$A_{XY} = |ad-bc|A_{AB}$$

A la expresión K=$ad-bc$ la llameros determinante de la relación de áreas.

B. Consideremos el paralelogramo de vértices ABDC



Donde $\overrightarrow{CS} = a\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DR} = a\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BN} = a\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ donde $0 < a < 1$. Es fácil comprobar que el cuadrilatero de vértices X, Y, W, Z es un paralelogramo (ver[10]) y además

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1-a}{1+a^2}\overrightarrow{AC} + \frac{a(1-a)}{1+a^2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{XZ} = -\frac{a(1-a)}{1+a^2}\overrightarrow{AC} + \frac{1-a}{1+a^2}\overrightarrow{AB}$$

Calculando el determinante de las áreas vemos que

$$ad-bc = \frac{(1-a)^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2(1-a)^2}{(1+a^2)^2} = \frac{(1-a)^2}{1+a^2}$$

Es decir,

$$A_{XYZW} = \frac{(1-a)^2}{1+a^2}A_{ABDC}$$

En particular si $a = \frac{1}{2}$ la relación es $\frac{1}{5}$.

Si hacemos $\overrightarrow{CS} = b\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DR} = a\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BN} = b\overrightarrow{BA}$,

$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ donde $0 < a, b < 1$. Encontramos

$$X = A + \frac{a}{1+ab}\overrightarrow{AC} + \frac{ab}{1+ab}\overrightarrow{AB}$$

$$Y = A + \frac{1}{1+ab}\overrightarrow{AC} + \frac{B}{1+ab}\overrightarrow{AB}$$

$$Z = D - \frac{a+1}{1+ab}\overrightarrow{AC} - \frac{b}{1+ab}\overrightarrow{AB}$$

$$W = D - \frac{a}{1+ab}\overrightarrow{AC} - \frac{ab}{1+ab}\overrightarrow{AB}$$

Vemos que estos cuatro puntos son los vértices de un paralelogramo. Además,

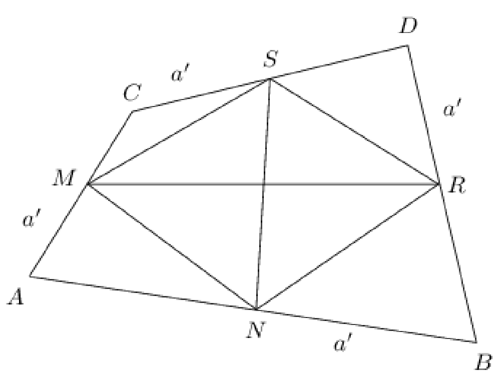
$$\overrightarrow{XZ} = \frac{a(b-1)}{1+ab}\overrightarrow{AC} + \frac{1-b}{1+ab}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1-a}{1+ab}\overrightarrow{AC} + \frac{b(1-a)}{1+ab}\overrightarrow{AB}$$

De donde

$$A_{XYZW} = \frac{(1-a)(1-b)}{1+ab}A_{ABDC}$$

C. Consideremos el cuadrilatero de vértices ABDC como se indica en la figura:



Donde $\overrightarrow{CS} = a\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DR} = a\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BN} = a\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ donde $0 < a < 1$ Es fácil ver que

$$\overrightarrow{MR} = (1-a)\overrightarrow{AD} - a\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{NS} = a\overrightarrow{AD} + (1-a)\overrightarrow{BC}$$

Calculando el discriminante tenemos

$$ad - bc = (1-a)^2 + a^2$$

En conclusión

$$A_{MNRS} = [(1-a)^2 + a^2]A_{ABDC}$$

En particular si $a = \frac{1}{2}$ la relación de las áreas es $\frac{1}{2}$. Si hacemos $\overrightarrow{CS} = b\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DR} = a\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BN} = b\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ donde

$$0 < a, b < 1$$

Y por un procedimiento similar encontramos

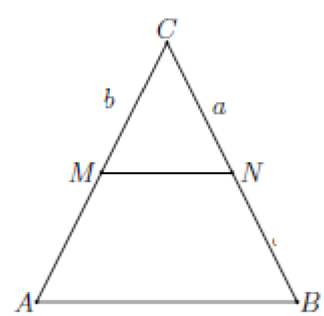
$$\overrightarrow{MR} = (1-a)\overrightarrow{AD} - a\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{SN} = -b\overrightarrow{AD} + (1-b)\overrightarrow{BC}$$

Por lo que

$$A_{MNRS} = [(1-a)(1-b) + ab]A_{ABDC}$$

D. Consideremos el triángulo de la figura



Donde

$$\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{AB} \rightarrow \|\overrightarrow{AM}\| = t\|\overrightarrow{AB}\| = a$$

$$\overrightarrow{AN} = r\overrightarrow{AC} \to \|\overrightarrow{AN}\| = t\|\overrightarrow{AC}\| = b$$

Luego,

$$A_{AMN} = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2\|\overrightarrow{AN}\|^2 - (\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN})^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2\|\overrightarrow{AB}\|^2 r^2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - (t\overrightarrow{AB}\cdot r\overrightarrow{AC})^2}}{2}$$

$$= trA_{ABC}$$

Si hacemos $\|\overrightarrow{AB}\| = l_1, \|\overrightarrow{AC}\| = l_2$ podemos escribir

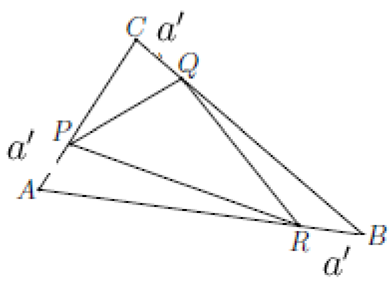
$$A_{AMN} = \frac{ab}{l_1 l_2}A_{ABC}$$

5. Consideremos el triángulo ΔABC de la figura y hagamos

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC} \to P = A + t\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BR} = r\overrightarrow{BA} \to R = B + r\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{CQ} = l\overrightarrow{CB} \to Q = C + l\overrightarrow{CB}$$



Ahora.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = C + l\overrightarrow{CB} - A - t\overrightarrow{AC}$$
$$= (1 - t)\overrightarrow{AC} + l\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = B + r\overrightarrow{BA} - A - t\overrightarrow{AC}$$
$$= (1 - r)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

Pero, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ es decir, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

Luego,

$$\overrightarrow{PR} = (1 - r - t)\,\overrightarrow{AC} - (1 - r)\overrightarrow{CB}$$

En resumen,

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - t)\overrightarrow{AC} + l\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - r - t)\overrightarrow{AC} + (1 - r)\overrightarrow{CB}$$

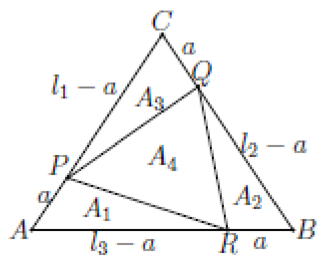
En este caso el determinante de las áreas es:

$$(1 - t)(1 - r) - l(1 - r - t)$$

Haciendo $l = \frac{a}{l_2}, r = \frac{a}{l_3}, t = \frac{a}{l_1}$ obtenemos

$$A_{PQR} = \left(\left(\frac{1}{l_1 l_2} + \frac{1}{l_1 l_3} + \frac{1}{l_2 l_3}\right)a^2 - \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right)a + 1\right)A_{ABC}$$

6. Resolvamos el problema anterior mediante sumas de áreas. Consideremos el triángulo como se ilustra en la figura.



Hagamos

$$a(A_1) = \frac{a}{l_1}\frac{l_3 - a}{l_3}A_{ABC}$$

$$a(A_2) = \frac{a}{l_3}\frac{l_2 - a}{l_2}a(\Delta ABC)$$

$$a(A_3) = \frac{a}{l_2}\frac{l_1 - a}{l_1}a(\Delta ABC)$$

Es claro que

$$a(A_1) + a(A_2) + a(A_3) + a(A_4) = a(\Delta ABC)$$

Por lo que

$$a(A_4) = A_{ABC} - \left[\frac{a}{l_1}\frac{l_3 - a}{l_3} + \frac{a}{l_3}\frac{l_2 - a}{l_2} + \frac{a}{l_2}\frac{l_1 - a}{l_1}\right]A_{ABC}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{a}{l_1}\left(1 - \frac{a}{l_3}\right) + \frac{a}{l_3}\left(1 - \frac{a}{l_2}\right) + \frac{a}{l_2}\left(1 - \frac{a}{l_1}\right)\right)\right]A_{ABC}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{l_1 l_2}+\frac{1}{l_1 l_3}+\frac{1}{l_2 l_3}\right)a^2-\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right)a+1\right)A_{ABC}$$

7. El caso general del ejemplo anterior, viene dado por

$$a(A_1)=\frac{a}{l_1}\frac{l_3-c}{l_3}A_{ABC}$$

$$a(A_2)=\frac{c}{l_3}\frac{l_2-b}{l_2}A_{ABC}$$

$$a(A_3)=\frac{b}{l_2}\frac{l_1-a}{l_1}A_{ABC}$$

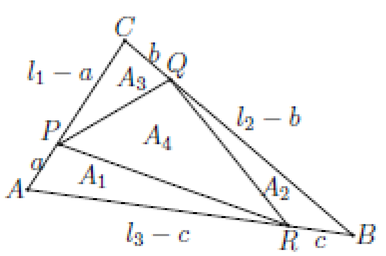
Como

$$a(A_1)+a(A_2)+a(A_3)+a(A_4)=A_{ABC}$$

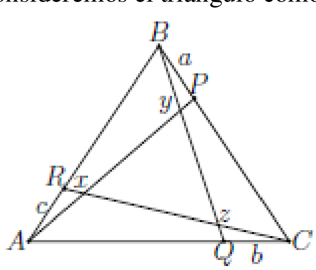
Entonces,

$$a(A_4)=\left[1-\left(\frac{a}{l_1}\left(1-\frac{c}{l_3}\right)+\frac{c}{l_3}\left(1-\frac{b}{l_2}\right)\right)\right]A_{ABC} \text{ o}$$

$$a(A_4)=\left[1-\left(\frac{a}{l_1}+\frac{b}{l_2}+\frac{c}{l_3}\right)+\left(\frac{ab}{l_1 l_2}+\frac{ac}{l_1 l_3}+\frac{bc}{l_2 l_3}\right)\right]A_{ABC}$$



8. Por último consideremos el triángulo como ilustra la figura.



$$X=A+t\overrightarrow{AP}=A+t\overrightarrow{AB}+ta\overrightarrow{BC}$$

$$X=A+r\overrightarrow{CR}=A+r\overrightarrow{CA}+rc\overrightarrow{AB}$$

Igualando y reordenando los términos tenemos

$$(1-r)\overrightarrow{CA}+(t-rc)\overrightarrow{AB}+ta\overrightarrow{BC}=0$$

Como $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, encontramos

$$(1-r-ta)\overrightarrow{CA}+(t-rc-at)\overrightarrow{AB}=0$$

Como $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{AB}$ son $L.I$ tenemos que

$$\begin{cases}1-r-ta=0\\ t-rc-at=0\end{cases}$$

Resolviendo tenemos

$$t=\frac{c}{1-a-ac},\ r=\frac{1-a}{1-a-ac}$$

De igual forma

$$Y=A+m\overrightarrow{AP}=A+m\overrightarrow{AB}+ma\overrightarrow{BC}$$

$$Y=B+n\overrightarrow{CQ}=B+n\overrightarrow{BC}+nb\overrightarrow{CA}$$

Igualando encontramos

$$(m-1)\overrightarrow{AB}+(ma-n)\overrightarrow{BC}-nb\overrightarrow{CA}=0$$

Pero $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$, reemplazando

$$(m-1+nb)\overrightarrow{AB}+(ma-n+nb)\overrightarrow{BC}=0$$

Como $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son $L.I$ debe ser que

$$m-1+nb=0$$

$$ma-n+nb=0$$

Resolviendo tenemos,

$$n=\frac{a}{ab+1-b},\ m=\frac{1-b}{ab+1-b}$$

Encontremos ahora a Z. Notemos que

$$Z=C+p\overrightarrow{CR}=C+p\overrightarrow{CA}+pc\overrightarrow{AB}$$

$$Z=B+q\overrightarrow{BQ}=B+q\overrightarrow{BC}+qb\overrightarrow{CA}$$

Igualando encontramos

$$(1-q)\overrightarrow{BC}+(p-qb)\overrightarrow{CA}+pc\overrightarrow{AB}=O$$

Pero

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}\rightarrow\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}.$$

Tenemos que

$$(1-q-pc)\overrightarrow{BC}+(p-qb-pc)\overrightarrow{CA}=O.$$

Como $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$ son $L.I$ tenemos

$$1-q-pc=0$$

$$p-qb-pc=0$$

Resolviendo,

$$p=\frac{b}{1+bc-c}\quad q=\frac{1-c}{1+bc-c}$$

EN RESUMEN TENEMOS,

$$X=A+\frac{c}{1-a+ac}\overrightarrow{AB}+\frac{ac}{1-a+ac}\overrightarrow{BC}$$

$$Y=A+\frac{1-b}{ab-b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a(1-b)}{ab-b+1}\overrightarrow{BC}$$

$$Z=C+\frac{b}{1+bc-c}\overrightarrow{CA}+\frac{bc}{1+bc-c}\overrightarrow{BC}$$

AHORA,

$$\overrightarrow{XY}=\left(\frac{1-b}{ab-b+1}-\frac{c}{1-a+ac}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{a(1-b)}{ab-b+1}-\frac{ac}{1-a+ac}\right)\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{XZ}=\left(1+\frac{bc-b}{1-bc+c}-\frac{c}{1-a+ac}\right)\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{b}{1+bc-c}-\frac{ac}{1-a+ac}\right)\overrightarrow{BC}$$

DEL RESULTADO ANTERIOR TENEMOS

$$A_{XYZ}=KA_{ABC}$$

DONDE,

$$K=\left(\frac{1-b}{ab-b+1}-\frac{c}{1-a+ac}\right)\left(1-\frac{b}{1+bc-c}-\frac{ac}{1-a+ac}\right)-\left(1+\frac{bc-b}{1-bc+c}-\frac{c}{1-a+ac}\right)\left(\frac{a(1-b)}{ab-b+1}-\frac{ac}{1-a+ac}\right)$$

COMO CASO PARTICULAR $a=b=c$.

$$\overrightarrow{XY}=\frac{1-2a}{a^2-a+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a-2a^2}{a^2-a+1}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{XZ}=\frac{(a-1)(2a-1)}{a^2-a+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1-2a}{a^2-a+1}\overrightarrow{BC}$$

VEMOS,

$$K=\frac{(1-2a)^2}{a^2-a+1}$$

III. CONCLUSIONES

El área del paralelogramo permite encontrar ciertas áreas relacionadas de una manera relativamente fácil. Pueden encontrarse otras relaciones interesantes utilizando los vectores en la geometría euclidiana, ver [10].

REFERENCIAS

[1]. JUAN A. VIEDMA. introducción a la geometría analítica. editorial norma 1962

[2]. AGUSTÍN ANFOSSI. geometría analítica. editorial progreso. 1949

[3]. PAUL. R. RIDER. geometría analítica. Montaner y Simón. 1962

[4]. CHARLES WEXLER. geometría analítica. un enfoque vectorial. montaner y simon. 1968

[5]. CHARLES H. LEHMANN. geometría analítica. unión tipográfica hispano americana. 1968

[6]. APOSTOL M. TOM. calculus vol .I. edit reverté 1973

[7]. EDGAR OBONAGA, JORGE A. PÉREZ, VÍCTOR E. CASTRO. matemática 3, 4 álgebra y geometría. pime editores. 1984

[8]. EDGAR OBONAGA, JORGE A. PÉREZ, VÍCTOR E. CASTRO. matemática 5 trigonometrías y geometría analítica. pime editores. 1984

[9]. NIETO RUBÉN DARÍO, algebra vectorial. universidad del valle 1997

[10]. CAMPO ELÍAS GONZÁLEZ PINEDA. geometría vectorial. Universidad Tecnológica de Pereira 2009.