Operaciones recursivas en teoría de categorías

Recursive operations in categorical theory

Yuri A. Poveda, Edgar Alirio Valencia Angulo, Carlos Arturo Escudero Salcedo
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
yapoveda@utp.edu.co
evalencia@utp.edu.co
carlos10@utp.edu.co

***Resumen*— Estudiar relaciones entre la teoría de la recursión y la teoría de categorías, permite encontrar propiedades del universo recursivo que pueden representarse por medio de propiedades universales. Es posible generalizar en algunos aspectos este universo para buscar ejemplos de propiedades recursivas que no provengan de la aritmética y así entender desde otras perspectivas el teorema de incompletitud de Gödel.**

***Palabras clave*— Categoría, objeto números naturales, universo recursivo, conjuntos primitivos recursivos, representación categórica, categoría cartesiana.**

***Abstract*— Studying relationships between recursion theory and categorical theory, can find properties of the recursive universe that can be represented by universal properties. It is possible to generalize in some respects this universe to search examples of recursive properties that are not from the arithmetical universe and well understood from other perspectives, the Gödel's incompleteness theorem.**

***Key Word* — Category, object natural numbers, recursive universe, primitive recursive sets, categorical representation, Cartesian category.**

I. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un compendio de las operaciones recursivas sobre los números naturales como en [3], se muestra la generalización del objeto números naturales como en [2] y se prueba la existencia de una clase de morfismos primitivos recursivos en el contexto de la teoría de categorías intermedias de Freyd (ver [1]) y a partir de la teoría de funciones recursivas expuestas en [2]. Aunque los resultados aquí expuestos son ampliamente conocidos entre especialistas, no se encuentran en la mayor parte de la literatura, las demostraciones son novedosas y originales.

En esta presentación sobre las operaciones recursivas en el contexto de la teoría de categorías (ver [4]), se requiere de ella que sea cartesiana cerrada (ver [1]). Estas condiciones implican la existencia de objeto final, lo cual excluye una gran variedad de posibles ejemplos recursivos que no provienen de la aritmética.

En [4] se desarrolla una noción de objeto números naturales más débil que la propuesta por Lawvere, desde una perspectiva diferente a la propuesta por Thibault. La principal motivación de introducir esta noción en [4] fue la de construir morfismos recursivos en una categoría no cartesiana y mostrar ejemplos de una naturaleza diferente a la de la aritmética.

II. COMPENDIO DE LA TEORIA ESTANDAR DE LAS FUNCIONES RECURSIVAS

En esta sección se estudiará el universo en el cual se desarrolla la teoría básica de la recursión estándar y se resumirán los principales resultados obtenidos con ella.

A. Universo de las funciones recursivas

El espacio global en el que se sitúan las funciones recursivas es

$$\bigcup_{k>0} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$$

Donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de números naturales. El universo de las funciones recursivas incluye funciones cuyo dominio son potencias de $\mathbb{N}$ cuyo codominio es $\mathbb{N}$. Sin embargo lo más interesante son las operaciones recursivas entre ellas. Estas operaciones permiten estratificar y auto-enumerar ciertas clases de funciones recursivas con una función que también es recursiva.

El universo de las funciones recursivas se encuentra estratificado por clases de funciones recursivas a partir de propiedades estructurales. La primera estratificación fundamental divide en tres clases dicho universo: las funciones primitivas recursivas, las funciones recursivas totales y las funciones recursivas parciales.

1. Funciones primitivas recursivas $\mathfrak{PR}$

Definición 1. La clase de funciones primitivas recursivas (p.r.) es la mínima subclase de $\bigcup_{k>0} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$ tal que:

a) Contiene las funciones básicas:
$z: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (función cero)

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2013
Fecha de Aceptación: 30 de Abril de 2013

$x \to 0$

$s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (función sucesor)
$x \to x+1$

$\Pi_k^n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (k-ésima proyección)
$(x_1, \cdots, x_n) \to x_k$

b) Es cerrado bajo composición y bajo la recurrencia primitiva:
Composición: dadas $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $g_i: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, con $1 \leq i \leq n$, funciones p.r. entonces
$f(g_1, \cdots, g_n)$ es p.r.

Recurrencia primitiva: dadas $f: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, entonces $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$h(x_1, \cdots, x_k, 0) = g(x_1, \cdots, x_k)$$

y

$$h(x_1, \cdots, x_k, s(y)) = f(x_1, \cdots, x_k, y, h(x_1, \cdots, x_k, y))$$

es p.r.

Ejemplo 1. Funciones p.r.

a) $id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es p.r. debido a que $id_{\mathbb{N}} = \Pi_1^1$ (básica).
b) $c_k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: n \to k$ es p.r. debido a que $c_0(x) = z(x)$ y $c_k(x) = s^k(x)$.
c) $+: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}: (n,m) \to n+m$ es p.r. debido a que la suma se obtiene por recurrencia primitiva tomando
$g = id_{\mathbb{N}}$ y $f(l,m,n) = s\left(\Pi_3^3(l,m,n)\right) = s(n)$.

Además de los ejemplos anteriores también son p.r. el producto, la exponenciación, la resta truncada, la distancia, el valor absoluto, las funciones discriminantes y las sumas y el producto acotado de funciones p.r. etc.

2. Funciones recursivas totales: $\mathfrak{R}_{tot}$

Definición 2. Una relación $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ es regular (en la última coordenada, si y sólo si, para todo $\vec{a} \in \mathbb{N}^k$ existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $R(\vec{a}, y)$.

Definición 3. $\mathfrak{R}_{tot}$ es la mínima subclase de $\bigcup_{k>0} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$ tal que :

a) $\mathfrak{R}_{tot}$ contiene las funciones básicas.
b) $\mathfrak{R}_{tot}$ es cerrado bajo composición, recurrencia primitiva y minimización regular.

Minimización regular: Dada $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ regular y recursiva (es decir con la función característica recursiva), entonces: $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$\vec{x} \to \{min\{y: R(\vec{x}, y), \qquad recursiva\}\}$$

es recursiva total.

3. Funciones parciales recursivas $\mathfrak{R}$

Definición 4. $\mathfrak{R}$ es la mínima subclase de $\bigcup_{k>0} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$ tal que:

a) $\mathfrak{R}$ contiene las funciones básicas.
b) $\mathfrak{R}$ es cerrado bajo composición, recurrencia primitiva y minimización (extiende a relaciones regulares).

Minimización: Dada $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ recursiva, entonces $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$x \to \begin{Bmatrix} min\{y: R(\vec{x}, y), & si\ existe\ algún\ y\} \\ indefinida, & en\ otro\ caso \end{Bmatrix}$$

es parcial recursiva.

B. Algunos resultados de la teoría clásica de las funciones recursivas

1. Argumentos de cardinalidad

Las clases de funciones recursivas son enumerables por construcción. Sin embargo no existe dentro de las funciones primitivas recursivas una función que enumere a las primitivas recursivas. Basta usar un argumento diagonal para llegar a una contradicción. Tampoco existe una función recursiva total que decida cuándo una función recursiva parcial converge (problema de la parada). El procedimiento de diagonalización no basta para producir funciones fuera de las clase de las recursivas parciales.

Existe una función parcial recursiva que enumera efectivamente a las parciales recursivas. La parcialidad es una autodefensa contra el argumento de la diagonal.

2. Propiedades estructurales

A partir de las definiciones de subclases de funciones recursivas es posible:

a) codificar, decodificar y concatenar n-tuplas recursivamente.
b) mostrar que $\mathfrak{R}_{tot}$ es efectivamente enumerable por funciones primitivas recursivas que actúan uniformemente sobre estratos asociados a números de variables (forma normal de Kleene).

Forma normal de Kleene: Existen $\mathcal{U}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función primitiva recursiva y para cada $n \geq 1$ existe $T_n \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ predicado p.r. tal que para toda función $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ con $f \in \mathfrak{R}_{tot}$ se tiene que existe $e \in \mathbb{N}$ (índice de f) tal que para todo $\vec{x}$ existe y tal que $T_n(e, \vec{x}, y)$ y $f(\vec{x}) = \mathcal{U}(\text{min}y: T_n(e, \vec{x}, y))$.

La forma normal puede ser extendida a toda la clase $\mathfrak{R}$.

La gödelización por medio de la codificación de tuplas, la clausura recursiva de conectivos proposicionales y el armazón por árboles de cómputo permite la construcción recursiva de la forma normal de Kleene. Así a partir de un número natural dado es posible decidir recursivamente si este proviene de una función recursiva, el tipo de función recursiva y el valor de dicha función en cada punto.

Teorema de enumeración: Dada $\{\varphi_e^n\}_{e\in\mathbb{N}}$ una enumeración efectiva de las funciones parciales recursivas con n variables; para todo $n \geq 1$ existe $\Phi_n: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ parcial recursiva que enumera las parciales recursivas de n variables: para todo $\vec{x} \in \mathbb{N}^{n+1}$,

$$\Phi_n(e,\vec{x}) = \varphi_e(\vec{x}).$$

Teorema de parametrización: (S-m-n) para todo $m, n \in \mathbb{N}$ existe $S_n^m: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ primitiva recursiva tal que para todo $(e,\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{N}^{m+n+1}$ tal que

$$\Phi_{n+m}(e,\vec{x},\vec{y}) = \Phi_m(S_n^m(e,\vec{x}),\vec{y})$$

Toda función recursiva de n-variables produce una nueva función recursiva si se fijan algunas de las variables; el procedimiento para encontrar el índice de la nueva función es uniforme.

Teorema de universalidad: existe $\Phi: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ parcial recursiva que enumera las parciales recursivas (en cualquier número de variables): para toda función $f \in \mathfrak{R}$ existe $e \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ se tiene que

$$f(\vec{x}\,) = \Phi(e,\langle\vec{x}\rangle)$$

donde $\langle\vec{x}\rangle$ corresponde a la codificación de n-tuplas realizada en la construcción de la forma normal de Kleene.

Segundo teorema de la recursión: para toda $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ parcial recursiva, existe $e \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f(e,x) = \varphi_e(x)$$

Teorema del punto fijo: para toda $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva total, existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$. En general se puede mostrar que toda función recursiva total tiene un número infinito de puntos fijos.

Proposición (Kleene 1952): $\mathfrak{R}$ es la mínima clase de funciones tal que contiene las básicas, la resta truncada, y es cerrada bajo composición, definición por casos y definiciones de punto fijo.

III. LOS NUMEROS NATURALES EN CATEGORIAS

Se abstraerán aquí algunas de las propiedades universales del conjunto de números naturales; esta tarea ha sido realizada por Lawvere desde una perspectiva de objetos iniciales; en el presente trabajo se presentará dicha construcción y algunas de sus propiedades. Un segundo trabajo en esta dirección por fue realizada por Marie- France Thibault (1977- 1982) quien estudió formalmente categorías con objeto números naturales débil. Las categorías recursivas producidas con el objeto números naturales débil, se llamaron categorías pre-recursivas. Las propiedades del objeto números naturales de Lawvere implican las propiedades del objeto números naturales débil.

El objeto números naturales de Lawvere implica la inducción infinita sobre los naturales, mientras que en esta nueva noción se trata de manera independiente. Además el objeto números naturales de las otras aproximaciones requiere que la categoría tenga objeto final; este hecho se constituye en una posibilidad para estudiar universos recursivos intermedios que no provengan de la aritmética.

Las propiedades del objeto números naturales propuesto por Lawvere implican las del objeto números naturales débil que introducimos aquí.

A. Objeto números naturales de Lawvere (ONN)

Definición 5. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto terminal 1. Un objeto números naturales (ONN) consiste de un morfismo $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$, que verifica que para todo $1 \xrightarrow{x_0} X \xrightarrow{f} X$, existe un único morfismo $N \xrightarrow{\psi} X$ tal que

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x_0"'] & & \\ & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

En conjuntos esta definición corresponde a la definición de ψ por recurrencia primitiva a partir de f y x_0. Si $X = \mathbb{N}$ clásicamente se pide que f sea recursiva pero en el caso general no es necesario.

Proposición 1. Dada una categoría $\mathfrak{C}$ con coproductos arbitrarios, $\coprod_{i\in\mathbb{N}} 1$ es ONN.

Demostración. Tome $0 = i_0$ y s definida por la siguiente propiedad del colímite.

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{i\in\mathbb{N}} 1 \arrow[dd, dashed, "s"] \\ 1 \arrow[ur, bend left, dashed, "i_0"] \arrow[ur, "i_n"'] \arrow[dr, "i_{n+1}"'] & \\ & \coprod_{i\in\mathbb{N}} 1 \end{tikzcd}$$

Dado $1 \xrightarrow{x_0} X \xrightarrow{f} X$ defínase ψ mediante la propiedad del colímite como sigue:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "0"] \arrow[drr, bend left, "x_0"] & & & \\
& \coprod_{i\in\mathbb{N}} 1 \arrow[r, dashed, "\psi"] & X \arrow[r, "f"] & X \\
1 \arrow[ur, "i_n"] \arrow[urr, bend right, "f^n x_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$f^{n+1}x_0 = f\psi i_n = \psi s i_n$ para todo $n \geq 0$; como la colección de inyecciones en el coproducto $\{i_n\}_{n\geq 0}$ es generadora por tener como codominio un colímite, entonces $f\psi = \psi s$.

Noción de infinito. En la categoría de conjuntos $\mathbb{N}$ y $1+\mathbb{N}$ son isomorfos. La propiedad que dice que para todo $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$ y para todo $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x+1)$ implica que f es constante refleja el hecho de que $\mathbb{N}$ es el mínimo infinito.

Estas propiedades se generalizan en categorías, valen para un ONN y más aún, lo caracterizan.

Proposición 2. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto final 1, coproductos y ONN se tiene que $1+N$ es isomorfo a N.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "0"'] & 1+N \arrow[d, "{[0,S]}"] & N \arrow[l, "i_N"'] \arrow[dl, "S"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Por propiedad del ONN existe ψ tal que,

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, "\psi"] & N \arrow[dd, "\psi"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "i_1"'] & & \\
& 1+N \arrow[r, "{i_N[0,S]}"'] & 1+N
\end{tikzcd}$$

El morfismo ψ es el inverso del morfismo $[0,s]$ y por lo tanto se tiene el isomorfismo. Para verificar que ψ es el inverso $[0,s]$, analizamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "2"] & N \arrow[d, "\psi"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "i_1"'] \arrow[dr, "0"'] & 1+N \arrow[r, "{i_N[0,S]}"'] \arrow[d, "{[0,S]}"] \arrow[dr, phantom, "3"] & 1+N \arrow[d, "{[0,S]}"] \\
& N \arrow[r, "S"'] & N
\end{tikzcd}$$

Por definición de ψ se sigue que $\psi 0 = i_1$ y $\psi s = i_N[0,s]\psi$, además $[0,s](i_N[0,s]) = s[0,s]$ por construcción. Por propiedad universal del ONN se deduce que $[0,s]\psi = id_N$. Queda por demostrar que $\psi[0,s] = id_{N+1}$. Por propiedades de la inclusión en el coproducto basta demostrar $\psi[0,s]i_1 = i_1$ y $\psi[0,s]i_N = i_N$. La primera se deduce de que $\psi[0,s]i_1 = \psi 0 = i_1$; la segunda igualdad se sigue de la propiedad universal del ONN a partir de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, "i_N"] & N \arrow[dd, "i_N"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "i_N 0"'] & & \\
& 1+N \arrow[r, "{i_N[0,S]}"'] & 1+N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, "\psi S"] & N \arrow[dd, "\psi S"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "i_N 0"'] & & \\
& 1+N \arrow[r, "{i_N[0,S]}"'] & 1+N
\end{tikzcd}$$

Proposición 3. El morfismo s de cualquier objeto números naturales en una categoría con objeto final y colímites finitos es un monomorfismo no epimorfismo.

Demostración. s es un monomorfismo por propiedad universal del coproducto como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& N & \\
& 1+N \arrow[u, dashed, "\alpha"] & \\
& N \arrow[u, equal] & \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[uuur, bend left, "0"] & & N \arrow[ul, "s"'] \arrow[uuul, bend right, "id_N"']
\end{tikzcd}$$

De forma análoga se muestra que s no es epimorfismo; basta observar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& N & \\
& 1+N \arrow[u, dashed, "\alpha"] & \\
& N \arrow[u, equal] \arrow[uu, dashed, bend right, "s^*"'] & \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[uuur, bend left, "0"] & & N \arrow[ul, "s"'] \arrow[uuul, bend right, "sos"']
\end{tikzcd}$$

$s \circ s = s^2 = s^*s$ y además $s^* \neq s$ pues $0 = s^*0$ y $0 \neq s0$ (esta última afirmación se demostrará en la siguiente proposición); por lo tanto s no es un epimorfismo, de lo contrario $s^* = s$.

Proposición 4. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto final 1, coproductos y ONN, entonces $N \to 1$ es el co-igualador de los morfismos $N \xrightarrow{s} N$ y $N \xrightarrow{id} N$.

Demostración. $N \to 1$ coiguala a s y a id_N por unicidad del objeto terminal y tiene la propiedad universal debido a que para todo $N \xrightarrow{t} T$ tal que $ts = t$ se tiene el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "id_N"'] & N \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t"] & 1 \arrow[d, "0"] \\ & T & N \arrow[l, "t"] \end{tikzcd}$$

de la propiedad universal del ONN se sigue que $t0n = t$ si comparamos los diagramas,

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "t"] & N \arrow[dd, "t"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "t0"'] & & \\ & T \arrow[r, "id_T"'] & T \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "n"] & N \arrow[d, "n"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "id_1"'] \arrow[ddr, "t0"'] & 1 \arrow[r, "id_1"'] \arrow[d, "0"] & 1 \arrow[d, "0"] \\ & N \arrow[d, "t"] & N \arrow[d, "t"] \\ & T \arrow[r, "id_T"'] & T \end{tikzcd}$$

Proposición 5. En toda categoría con objeto final, coproductos finitos y ONN se tiene que $s0 \neq 0$.

Demostración. Si suponemos que $s0 = 0$, los siguientes diagramas,

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "id_N"] & N \arrow[dd, "id_N"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "s0"'] & & \\ & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "s"] & N \arrow[dd, "s"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "s0"'] & & \\ & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}$$

conmutan y por la propiedad universal del ONN se sigue que $s = id_N$, lo cual es contradictorio con el hecho de que s no es un epimorfismo.

Notas

1) Todo conjunto ordenado mirado como una categoría no posee ONN, debido a que todo monomorfismo es epimorfismo.
2) En toda categoría cartesiana con productos finitos y ONN se tiene que $s^{k+1}0 \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si para algún $k \in \mathbb{N}$, $s^{k+1}0 = 0$, entonces $s^{k+1} = id_N$, por la propiedad universal del ONN, lo cual contradice el hecho de que s no es epi.

Proposición 6. En toda categoría $\mathfrak{C}$ con ONN vale el *principio de inducción finita:* para todo par de monomorfismos $A \xrightarrow{f} N$ y $1 \xrightarrow{x} A$ tales que $fx = 0$ y $sf \leq f$ (con la relación de orden usual entre monomorfismos), se tiene que $f \in [id_N]$

Demostración. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo y usar la propiedad universal del ONN:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "x"'] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "f"] \\ & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}$$

de la definición de ONN se sigue que $\psi 0 = x$ y $\psi s = g\psi$; por hipótesis $fg = sf$ y por propiedad universal del ONN, $f\psi = id_N$.

IV. RECURSION PRIMITIVA EN UNA CATEGORIA CARTESIANA CERRADA

En la categoría de los conjuntos se pueden definir funciones sobre los números naturales por recursión primitiva: para todo $A \xrightarrow{g} B$ y para todo $A \times N \times B \xrightarrow{h} B$ existe un único $A \times N \xrightarrow{f} B$ tal que

$$f(a,0) = g(a) \quad \text{y} \quad f(a, x+1) = h\big(a, x, f(a,x)\big).$$

En la teoría clásica de funciones recursivas $A = \mathbb{N}^n$ y $B = \mathbb{N}$.

En categoría cartesiana cerrada (CCC) con ONN, vale de manera similar el principio de recursión primitiva.

Proposición 7. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría (CCC) con ONN, para todo $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{t} B$ existe un único $\psi: A \times N \to B$ tal que,

$$\begin{tikzcd} & A \times N \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[dd, "\psi"] & A \times N \arrow[dd, "\psi"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] & & \\ & B \arrow[r, "t"'] & B \end{tikzcd}$$

Demostración. $\mathfrak{C}$ posee exponenciales y se puede transponer $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{t} B$ a $1 \xrightarrow{[x]} B^A \xrightarrow{t^A} B^A$ y se tiene que

$$\begin{tikzcd} A \times B^A \arrow[r, "ev"] & B \\ A \times 1 \arrow[u, "id_A \times \lceil x \rceil"] \arrow[r, "\pi_A"'] & A \arrow[u, "x"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times B^A \arrow[r, "ev"] & B \\ A \times B^A \arrow[u, "id_A \times t^A"] \arrow[r, "ev"'] & B \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

Conmutan y así por la propiedad universal del ONN, existe un único ψ tal que,

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\lceil x \rceil"'] & & \\ & B^A \arrow[r, "t^A"'] & B^A \end{tikzcd}$$

A partir de los diagramas precedentes se concluye que,

$$\begin{tikzcd} & & A \times N \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[d, "id_A \times \psi"] & A \times N \arrow[d, "id_A \times \psi"] \\ A \arrow[urr, bend left, "{[id_A, 0!_A]}"] \arrow[r, "{[id_A, !_A]}"] \arrow[drr, bend right, "x"'] & A \times 1 \arrow[ur, "id_A \times 0"] \arrow[r, "id_A \times \lceil x \rceil"'] \arrow[dr, "x\pi_A"'] & A \times B^A \arrow[r, "id_A \times t^A"'] \arrow[d, "ev"] & A \times B^A \arrow[d, "ev"] \\ & & B \arrow[r, "t"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

La unicidad de $A \times N \xrightarrow{ev(id_A \times \psi)} B$ se deduce de la unicidad de ψ.

Proposición 8. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría (CCC) con ONN; para todo $A \xrightarrow{g} B$ y para todo $A \times N \times B \xrightarrow{h} B$ existe un único $A \times N \xrightarrow{f} B$ se tiene que:

i) $A \xrightarrow{g} B = (A \xrightarrow{[id_A, !_A]} A \times 1 \xrightarrow{id_A \times 0} A \times N \xrightarrow{f} B)$

ii) $A \times N \xrightarrow{id_A \times s} A \times N \xrightarrow{f} B = (A \times N \xrightarrow{[\pi_A, \pi_N, f]} A \times N \times B \xrightarrow{h} B)$.

Demostración. De la proposición anterior se sigue que existe k, tal que,

$$\begin{tikzcd} & A \times N \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[dd, "k"] & A \times N \arrow[dd, "k"] \\ A \arrow[ur, "{[id_A, 0!_A]}"] \arrow[dr, "{[id_A, 0!_A, g]}"'] & & \\ & A \times N \times B \arrow[r, "{[\pi_A, s\pi_N, h]}"'] & A \times N \times B \end{tikzcd}$$

donde, $\pi_A k = \pi_A$ y $\pi_N k = \pi_N$.

$A \times N \xrightarrow{k} A \times N \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ sirve como el morfismo f buscado debido a que,

$$\begin{tikzcd} & A \times N \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[dd, "\pi_A k"] & A \times N \arrow[dd, "\pi_A k"] \\ A \arrow[ur, "{[id_A, 0!_A]}"] \arrow[dr, "id_A"'] & & \\ & A \arrow[r, "id_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \times N \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[dd, "\pi_N k"] & A \times N \arrow[dd, "\pi_N k"] \\ A \arrow[ur, "{[id_A, 0!_A]}"] \arrow[dr, "0!_A"'] & & \\ & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}$$

Así $k = [\pi_A, \pi_N, \pi_B]k = [\pi_A k, \pi_N k, \pi_B k] = [\pi_A, \pi_N, \pi_B k]$ luego $k = [\pi_A, \pi_N, f]$ y,

i) $f[id_A, 0!_A] = \pi_B k[id_A, 0!_A] = \pi_B[id_A, 0!_A, g] = g$

ii) $f(id_A \times s) = \pi_B k(id_A \times s) = \pi_B[id_A, s\pi_N, h]k$ luego, $f(id_A \times s) = hk = h[\pi_A, s\pi_N, f]$.

Mediante la recursión primitiva en una CCC, con ONN se tienen las operaciones usuales de la aritmética como la suma, multiplicación y exponenciación.

V. CONCLUSIONES

A pesar de que un ONN asegura la clausura recursiva primitiva, se requieren de la categoría varias propiedades, como por ejemplo: que tenga exponenciales y objeto clasificador. Sería importante encontrar un ambiente categórico más débil que sea cerrado para ciertas operaciones recursivas; una posibilidad consiste en debilitar el ONN y buscar caracterizaciones más generales para dicho objeto de tal forma que la clase de morfismos seleccionados sea cerrada para operaciones recursivas. Otra posibilidad consiste en trabajar con universos recursivos donde se debilite la clausura de las construcciones recursivas.

REFERENCIAS

[1] P. Freyd and A. Scedrov, *Categories, Allegories* Amsterdam: North-Holland, 1990.

[2] J. Lambek and P.J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorial Logic,* Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[3] P. Odifreddi, *Clasical recursion theory,* Amsterdam: North-Holland, 1989.

[4] Y. Poveda, *Categorías intermedias y recursión,* tesis de Maestría en ciencias matemáticas, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2000.