Redefinición de grupos y subgrupo difusos

Redefinition of fuzzy groups and fuzzy subgroups

Hugo Alain Zapata Ceballos[1*], Tulio Rafael Amaya de Armas [2].
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia
hugo.zapata@unisucre.edu.co
tuama1@hotmail.com

***Resumen*— En este documento se proponen definiciones de grupos y subgrupo difusos diferentes a las expuestas por Rosenfeld, así como algunas propiedades de estas estructuras. Una de las diferencias más relevantes de estas definiciones consiste en el hecho de que en la dada por Rosenfeld se enuncia el concepto de grupo difuso de un grupo clásico, mientras que en el presente artículo se hacen para grupos y subgrupos difusos de conjuntos clásicos, es decir se elimina la condición impuesta por Rosenfeld de trabajar sobre grupos.**

***Palabras clave*—Grupos difusos, subgrupos difusos, Rosenfeld, operación binaria difusa.**

***Abstract*— In this paper proposes definitions of fuzzy sub groups and different to those given by Rosenfeld and some properties of these structures. One of the most significant differences in these definitions is the fact that on the left by Rosenfeld states the concept of fuzzy set of a classical group, whereas in this article are made to groups and subgroups classic fuzzy sets is that removes the condition imposed by Rosenfeld to work on fuzzy sets.**

***Key Word*— Fuzzy groups, fuzzy subgroups, Rosenfeld, fuzzy binary operation.**

I. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la definición de grupo difuso dada por Azriel Rosenfeld en 1971 en su trabajo titulado *Fuzzy groups* se establece la condición de trabajar sobre grupos clásicos para formar grupos difusos, múltiples investigaciones, entre ellas se puede mencionar, la realizada por Formato, Gerla y Scarpati en el año 1999 titulada Fuzzy subgroups and similarities, así mismo la investigación hecha por Demirci y Recasens titulada Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations, se han realizado a través de los años basados en la definición dada por Rosenfeld, aunque algunos autores, tales como Demirci y Recasens han descrito esta extensión de grupos clásicos a grupos difusos como una "extensión natural", se notará en el transcurso del presente artículo que la nueva definición que se propone sobre grupos y subgrupos difusos es una extensión de grupos y subgrupos desde el punto de vista clásico que puede ser catalogada como una "extensión sutil" de este tipo de estructuras. Durante el desarrollo de este artículo se demuestran algunas propiedades de los subgrupos difusos equivalentes a propiedades de los subgrupos clásicos los cuales nos muestra la estrecha y evidente relación entre la teoría clásica y la difusa para estas estructuras matemáticas. En este artículo se definen los grupos y subgrupos difusos eliminando la condición impuesta por Rosenfeld, de trabajar sobre grupos clásicos, este hecho permite la formación de grupos difusos sobre conjuntos no difusos esto facilita la generalización de los grupo difusos estandarizados, que fueron definidos por Rosenfeld así como nos permite ver que bajo ciertas condiciones se puede tomar los grupos difusos del presente artículo como una generalización de los grupos de Rosenfeld.

Fecha de Recepción: 30 de Abril de 2013
Fecha de Aceptación: 14 de Julio de 2013

II. CONTENIDO

A. Preliminares

Debido al enfoque de este artículo se requiere recordar algunas definiciones básicas de la teoría de grupos desde la perspectiva tradicional, se comienza por enunciar la definición de operación binaria, esta definición se extenderá más adelante a la teoría difusa, esta extensión será importante en el desarrollo de este documento.

Definición 1: (Ver [1]) Si G es un conjunto no vacío, una operación binaria sobre G es una función

$$*:G\times G\rightarrow G.$$

Otra estructura que será extendida en el trascurso de este artículo es el de semigrupo, el cual se define a continuación.

Definición 2: (ver [4]) Un semigrupo es un conjunto no vacío G, junto con una operación binaria $*$ sobre G, la cual es asociativa, es decir que: para todos $a, b, c \in G$ se cumple que

$$a*(b*c)=(a*b)*c.$$

El concepto de monoide, al igual que el concepto de semigrupo y el de operación binaria, es otra estructura que se extenderá a la teoría difusa, he aquí la definición desde el punto de vista clásico.

Definición 3: (ver [4]) Sea G un conjunto no vacío. Se dice que G junto con una operación binaria $*$ es un monoide si es un semigrupo tal que existe un elemento $e \in G$, tal que, para todo $a \in G$ se cumple que

$$a*e=e*a=a.$$

Uno de los conceptos principales de este artículo es el de grupo, a continuación recordamos su definición.

Definición 4: (ver [4]) Sea G un conjunto vacío y * una operación binaria sobre G; se dice que la pareja $(G;*)$ es un grupo si es un monoide en el cual se cumple que para todo $a \epsilon G$ existe un elemento inverso $a^{-1} \epsilon G$ tal que

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e.$$

Un semigrupo es abeliano o conmutativo si su operación binaria es conmutativa, es decir,

$$a*b=b*a \text{ para todo } a,\ b \epsilon G.$$

El concepto de grupo ha sido estudiado de manera amplia a través de muchos años y son muchas las propiedades que poseen estas estructuras, se mencionarán a continuación algunas de ellas, sobre las cuales centraremos nuestra atención debido a que estas serán extendidas a la teoría difusa.

Teorema 1: (ver [1]) Si $(G;*)$ es un grupo, entonces:
1. El elemento neutro es único.
2. Todo elemento que pertenece a G tiene un único inverso.
3. Para todos $a, b, c \epsilon G$ se cumple que: si

$$a*b=a*c$$

entonces $b=c$
y si

$$b*a=c*a$$

entonces $b=c$.

El siguiente teorema nos muestra una de las propiedades de los grupos la cual nos muestra los alcances de la propiedad asociativa de la operación binaria sobre grupos.

Teorema 2: (ver [1]) Sea $(G;*)$ Un grupo. Si $a, b, c, \epsilon G$ entonces

$$(a*b)*(c*d)=a*[(b*c)*d].$$

Aunque la estructura matemática de subgrupo de un grupo dado será tratada con bastante rigor en la última parte de este documento, seguidamente se presenta su definición

Definición 5: (ver [1]) Sean $(G;*)$ un grupo y $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Se dice que H subgrupo de G si la operación de G restringida a H hace de H un grupo.

A continuación se presenta un lema en el cual se establece una condición suficiente y necesaria para que un subconjunto no vacío de un grupo sea subgrupo; este lema será muy importante para la definición de subgrupo difuso que se propone en este artículo así como para la extensión de estas estructuras matemáticas.

Lema 3: (ver [1]) Sean H subconjunto de G, $H \neq \emptyset$ y $(G;*)$ un grupo. Entonces $H \subseteq G$ si y sólo si para todo $a, b \epsilon H$, se cumple que $a*b^{-1} \epsilon H$.

Recordamos una definición que al igual que las demás enunciadas, en el resto de los preliminares, será extendida hasta la teoría difusa desde el punto de vista de este artículo.

Definición 6: (ver [1]) Sean $(G;*)$ un grupo y H un subgrupo de $(G;*)$, definimos la relación ≡ en G, así: para $a, b \epsilon G$, $a \equiv b(H)$ si y sólo si $a*b^{-1} \epsilon H$ y leeremos “a es congruente con b, módulo H”.

Una definición clásica del álgebra de grupos es la clase de equivalencia, la cual enunciamos a continuación la cual se extenderá hasta la teoría difusa en el presente artículo.

Definición 7: (ver [1]) Sean $(G;*)$ un grupo y H un subgrupo de $(G;*)$. Al conjunto

$$[a]=\{x \epsilon G: x \equiv a(H)\}$$

Lo llamaremos la clase de equivalencia de a, según la relación ≡ (o según el subgrupo H).

A continuación enunciamos un lema que relaciona las clases de equivalencia y las clases laterales derechas.

Lema 4: (ver [1]) Para todo $a \epsilon G$, $[a]=Ha$.

Estudiaremos la cardinalidad de las clases de equivalencia desde el enfoque de la teoría difusa, por tal razón recordamos una relación entre la cardinalidad de las clases de equivalencia definidas en la teoría de grupos difusos.

Lema 5: (ver [1]) Si $a, b \epsilon G$, entonces $[a]$ y $[b]$ poseen el mismo número cardinal. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $[a]$ y los elementos de $[b]$.

Se mencionan ahora algunos conceptos básicos referentes a la teoría de conjuntos difusos, los cuales permitirán entender la generalización que se pretende exponer. Se sabe que la teoría conjuntos es una generalización de la teoría clásica de conjuntos; se nota que en la teoría de conjuntos clásica la pertenencia de los elementos del universo G a un conjunto A se puede expresar como la función característica

$$\chi_G: G \rightarrow \{0,1\}$$

tal que $\chi_G(a)=1$ si $a \epsilon G$ y $\chi_G(a)=0$ si a no pertenece a G. De esta función se puede ver que los únicos valores que puede tomar esta función son el 0 y el 1. Para la definición de un conjunto difuso se define una función

$$\chi_A: G \rightarrow [0,1]$$

en la cual, a diferencia de la definición de la función anterior, esta puede tomar valores en el intervalo $[0,1]$ distintos al 0 y al 1; de tal manera que un elemento de G puede pertenecer a A en diferentes medidas.

Definición 8: (ver [3]) Un conjunto difuso A de G, es el conjunto conformado por las parejas $(a,\mu_A(a))$ donde $a \epsilon G$ y $\mu_A(a)$se denomina como el grado de pertenencia de a en A, es decir un conjunto difuso A en G es el conjunto de pares $\{(a,\mu_A(a): a \in G, \mu_A: G \rightarrow [0,1]\}$.

Al igual que en los conjuntos clásicos en los cuales se define el conjunto de partes, en los conjuntos difusos existe una definición equivalente la cual se enuncia a continuación.

Definición 9: (ver [3]) Se define $F(G)$ como el conjunto de los conjuntos difusos de G.
Teniendo en cuenta las definiciones anteriores se procede a definir los grupos difusos.
En estudios anteriores referentes a la teoría de matemática difusa Rosenfeld [2] introdujo el concepto de subgrupos difusos como una generalización del concepto de subgrupo y estos conceptos han sido ampliamente estudiados por Schweizer [3] y Sidki [4] esta definición se enuncia a continuación:

Definición 10: (ver [2]) Sea G un grupo y $A \in F(G)$. Si
1. $\mu_A(ab) \geq min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}$ para todo $a, b \in G$,
2. $\mu_A(a^{-1}) = \mu_A(a)$ para todo $a \in G$; entonces A se denomina un grupo difuso de G. Si se añade la condición $\mu_A(e)=1$ entonces A se conoce como grupo difuso estandarizado.

B. Grupos difusos

En la siguiente definición se extiende hasta la teoría difusa la definición clásica de operación binaria, dada en la definición 1 el cual será clave en este artículo, ya que, al igual que en la teoría de grupos, nuestra teoría está basada en operaciones binarias. Se puede ver que esta definición es sólo una extensión "natural" de las operaciones binarias clásicas aplicado hasta conjuntos difusos.

Definición 11: Sea A un conjunto difuso del conjunto no vacío G. Se dice que * es una operación binaria difusa, con

$$*: A \times A \rightarrow A,$$

si para todos $a, b \in G$ existe $c \in G$ tal que

$$\mu_A(a) * \mu_A(b) = \mu_A(c).$$

La definición que se da a continuación es una extensión de la definición de semigrupo dada en los preliminares. Un ejemplo de operación binaria difusa es la función mín(a,b), ya que si se define la función mín sobre un conjunto difuso A de G

$$mín: A \times A \rightarrow A$$

notamos que si a y $b \in G$ tales que $\mu_A(a) \leq \mu_A(b)$ entonces

$$[\mu_A(a), \mu_A(b)] = \mu_A(a)$$

Definición 12: Un semigrupo difuso del conjunto no vacío G es un conjunto difuso A de G, junto con una operación binaria difusa * sobre A la cual es asociativa. Es decir
(Gd1) para todos $a, b \in G$

$$\mu_A(a) * [\mu_A(b) * \mu_A(c)] = [\mu_A(a) * \mu_A(b)] * \mu_A(c).$$

Considerando esta definición se puede ver que existe una relación entre los semigrupos difusos y los grupos difusos según Rosenfeld [2] como lo comprueba el teorema 7.

Lema 6: Si $A \in F(G)$ entonces $(A;min)$ es un semigrupo difuso de G.
Demostración: Es fácil verificar la asociatividad de la operación binaria mín, por lo tanto la pareja $(A;mín)$ es un semigrupo difuso de G ya que por hipótesis A es un conjunto difuso de G.

Al igual que las definiciones anteriores se hace una extensión del concepto de monoide hasta la teoría difusa.

Definición 13: Un monoide difuso es un semigrupo difuso $(A,*)$ de un conjunto no vacío G, que contiene un elemento identidad a ambos lados, es decir,
(Gd2): existe un $e \in G$ tal que

$$\mu_A(a) * \mu_A(e) = \mu_A(e) * \mu_A(a) = \mu_A(a)$$

para todo $a \in G$.

El lema siguiente demuestra que cualquier conjunto difuso bajo la operación binaria es un grupo difuso.

En el siguiente teorema se muestra que bajo ciertas condiciones los grupos difusos estandarizado, definidos por Rosenfeld [2] forman un caso particular de los monoides difusos definidos en el presente artículo.

Teorema 7: si A es un grupo difuso estandarizado del grupo G, entonces $(A,mín)$ es un monoide difuso de G.
Demostración: De acuerdo con el lema 6 se puede afirmar que $(A;mín)$ es un semigrupo difuso; ahora bien, como A es un grupo difuso estandarizado de G; entonces se cumple que $\mu_A(e)=1$, donde e es el elemento neutro del grupo G; de donde para todo $a \in G$; se tiene que, si tomamos como operación binaria $*=min$ se cumple que:

$$\mu_A(a) * \mu_A(e) = min[\mu_A(a), \mu_A(e)] = min[\mu_A(a), 1] = \mu_A(a),$$

con lo que A es un monoide difuso.

Se nota en la definición propuesta por Rosenfeld se impone la condición de que G sea un grupo desde el punto de vista clásico, en la definición que se propone a continuación esta condición no se tiene en cuenta.

Definición 14: Sea A un conjunto difuso del conjunto no vacío G Sobre A definimos una operación binaria difusa $*: A \times A \rightarrow A$. Se dice que el par $(A,*)$ es un grupo difuso de G si $(A,*)$ es un monoide difuso tal que
(Gd3): Para todo $a \in G$; existe $b \in G$ tal que

$$\mu_A(a) * \mu_A(b) = \mu_A(b) * \mu_A(a) = \mu_A(e),$$

A este elemento b se le denota como a^{-1}. Si además $(A,*)$ cumple que
(Gd4) Si para todos $a, b \in G$ se tiene que

$$\mu_A(a) * \mu_A(b) = \mu_A(b) * \mu_A(a)$$

se dirá que $(A,*)$ es un grupo difuso abeliano.

El siguiente teorema es una extensión de las propiedades de la asociatividad que poseen las operaciones binarias clásicas hasta la teoría difusa.

Teorema 8: Sea G un conjunto no vacío, y $(A,*)$ un grupo difuso de G. Si $a, b, c, d \in G$ entonces

$$[\mu_A(a) * \mu_A(b))] * [\mu_A(c) * \mu_A(d)] = \mu_A(a) * [\mu_A(b) * \mu_A(c)] * \mu_A(d).$$

Demostración: Sea $x \in G$ tal que

$$\mu_A(x) = \mu_A(c) * \mu_A(d)$$

entonces

$$[\mu_A(a)*\mu_A(b)]*[\mu_A(c)*\mu_A(d)]=[\mu_A(a)*\mu_A(b)]*\mu_A(x)$$
$$=\mu_A(a)*[\mu_A(b)*\mu_A(x)]$$
$$=\mu_A(a)*\{\mu_A(b)*[\mu_A(c)*\mu_A(d)]\}$$
$$=\mu_A(a)*[\mu_A(b)*\mu_A(c)]*\mu_A(d)$$

En la teoría de grupos existente uno de los teoremas bastante conocidos, es el de la unicidad del elemento neutro, la unicidad del inverso. En el siguiente teorema se demuestra un resultado análogo en el cual se menciona la unicidad del grado de pertenencia del elemento neutro así como la unicidad del grado de pertenencia del elemento inverso.

Teorema 9:1. Si $(A,*)$ es un grupo difuso del conjunto no vacío G, entonces los elementos del conjunto
$S_e=\{b \in G/ \mu_A(a)*\mu_A(b)=\mu_A(b)*\mu_A(a)=\mu_A(a) \text{ para todo } a \in G\}$, tienen la misma medida.
2. Los elementos del conjunto
$$S_a=\{b \in G/ \mu_A(a)*\mu_A(b)=\mu_A(b)*\mu_A(a)=\mu_A(e)\}$$
tienen la misma medida:
3. Para todos $a, b, c \in G$ se cumple que si
$$\mu_A(a)*\mu_A(b)=\mu_A(a)*\mu_A(c)$$
entonces
$$\mu_A(b)=\mu_A(c)$$
y si
$$\mu_A(b)*\mu_A(a)=\mu_A(c)*\mu_A(a)$$
entonces
$$\mu_A(b)=\mu_A(c).$$
Demostración:
1. Supongamos que $b, b' \in S_a$, entonces:
$$\mu_A(b)=\mu_A(b)*\mu_A(b')=\mu_A(b')*\mu_A(b)=\mu_A(b')$$
2. Por definición de grupo difuso se sabe que para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que
$$\mu_A(a)*\mu_A(a^{-1})=\mu_A(a^{-1})*\mu_A(a^{-1})=\mu_A(e),$$
si $b \in G$ y
$$\mu_A(a)*\mu_A(b)=\mu_A(e)$$
entonces
$$\mu_A(a^{-1})$$
$$=\mu_A(a^{-1})*\mu_A(e)$$
$$=\mu_A(a^{-1})*[\mu_A(a)*\mu_A(b)]$$
$$=[\mu_A(a^{-1})*\mu_A(a)]*\mu_A(b)$$
$$=\mu_A(e)*\mu_A(b)$$
$$=\mu_A(b)$$
(a) Supongamos que
$$\mu_A(a)*\mu_A(b)=\mu_A(a)*\mu_A(c)$$
como $(A,*)$ es un grupo difuso, entonces por (Gd3) existe $a^{-1} \in G$ tal que
$$\mu_A(a)*\mu_A(a^{-1})=\mu_A(e),$$
de donde
$$\mu_A(a)*\mu_A(b)=\mu_A(a)*\mu_A(c)$$
$$\mu_A(a^{-1})*[\mu_A(a)*\mu_A(b)]=\mu_A(a^{-1})*[\mu_A(a)*\mu_A(c)]$$
$$[\mu_A(a^{-1})*\mu_A(a)]*\mu_A(b)=[\mu_A(a^{-1})*\mu_A(a)]*\mu_A(c)$$
$$\mu_A(e)*\mu_A(b)=\mu_A(e)*\mu_A(c)$$
$$\mu_A(b)=\mu_A(c)$$
(b) Supongamos que
$$\mu_A(b)*\mu_A(a)=\mu_A(c)*\mu_A(a)$$
como $(A*)$ es un grupo difuso, entonces por (Gd3) existe $a^{-1} \in G$ tal que
$$\mu_A(a)*\mu_A(a^{-1})=\mu_A(e),$$
de donde
$$\mu_A(b)*\mu_A(a)=\mu_A(c)*\mu_A(a)$$
$$[\mu_A(b)*\mu_A(a)]*\mu_A(a^{-1})=[\mu_A(c)*\mu_A(a)]*\mu_A(a^{-1})$$
$$\mu_A(b)*[\mu_A(a)*\mu_A(a^{-1})]=\mu_A(c)*[\mu_A(a)*\mu_A(a^{-1})]$$
$$\mu_A(b)*\mu_A(e)=\mu_A(c)*\mu_A(e)$$
$$\mu_A(b)=\mu_A(c).$$

C. Subgrupos difusos

En la siguiente sección se trabajará la definición de subgrupo difuso la cual, como se notará, es una extensión "natural" de los subgrupos clásicos, de igual forma se presentan algunos resultados relacionados con estas estructuras.
Para definir subgrupos difusos se utiliza el concepto de restricción de una función, el cual se recuerda a continuación
Definición 15: (Ver [7]) Dada una función $f: A \rightarrow B$ y un subconjunto $C \subseteq A$, la restricción de f al conjunto C es la función $f|_C: C \rightarrow B$, dada por:
$$f|_C(x) = f(x),$$
para cada $x \in C$

Definición 16: Sean $(A;*)$ un grupo difuso de G:y H subconjunto de G. Se dice que B es un subgrupo difuso de $(A;*)$ si $\mu_B=\mu_A|_H$ y definimos la operación binaria $*|_B$ sobre B, la cual es una restricción de la operación binaria * sobre A, que hace que la pareja $(A;*)$ sea un grupo difuso de G. Se dice que la pareja $(B; *|_B)$ es un subgrupo difuso de $(A;*)$ si $(B;*|_B)$ es un grupo difuso de H.

Existe en la teoría de grupos un importante resultado que nos brinda la manera de comprobar si un subconjunto de un grupo es o no un subgrupo. De manera similar en la teoría que se propone se prueba un resultado que permite comprobar si alguna restricción al grupo difuso es o no un subgrupo difuso.

Lema 10: Sea $(B;*)$ un subgrupo difuso de $(A;*)$, donde $(A;*)$ es un grupo difuso de G. La pareja $(B; *|_B)$ es un subgrupo difuso de $(A;*)$ si y sólo sí, para todo $a, b \in H$ se cumple que existe un $c \in G$ tal que
$$\mu_B(a)*\mu_B(b^{-1})=\mu_B(c).$$
Demostración: (→) Si $(B;*)$ es un subgrupo difuso de $(A;*)$ se cumple que para todos $a, b \in H$, existe un $c \in H$ tal que
$$\mu_B(a)*\mu_B(b^{-1})=\mu_B(c) \in B.$$
(←) Supongamos que para todos $a, b \in H$,
$$\mu_B(a)*\mu_B(b^{-1})=\mu_B(c) \in B.$$
Como para todos $a, b \in H$,
$$\mu_B(a)*\mu_B(b^{-1})=\mu_B(c) \in B$$
entonces para todo $a \in H$; se cumple que
$$\mu_B(a)*\mu_B(a^{-1})=\mu_B(e) \in B$$
es decir que existe $e \in H$ que es un elemento neutro de la operación * en $B\times B$.
2. Sea $a \in H$; entonces
$$\mu_B(e)*\mu_B(a^{-1})=\mu_B(a^{-1}) \in B.$$
3.Sean $a, b \in H$ entonces
$$\mu_B(a)*\mu_B(b)=\mu_B(a)* \mu_B((b^{-1})^{-1}) \in H,$$
con lo que B es cerrado para la operación *.

4. Como *(A;*)* es un grupo difuso de *G*, la operación * es asociativa y por lo tanto también lo es entre los elementos de *B*.

Se define a continuación la relación de congruencia con respecto a un subgrupo difuso, el cual es equivalente a la definición de la relación de equivalencia congruente módulo subgrupo ampliamente conocido.

Definición 17: Sea *G* un conjunto no vacío y *B* un subgrupo difuso del grupo difuso *(A;*)* de *G*; se define la relación ≡ en *(A;*)* así: para $a, b \in G$,

$$\mu_A(a)\equiv\mu_A(b)(B)$$

sí y sólo sí existe un $c \in B$ tal que

$$\mu_A(a)*\mu_A(b^{-1})=\mu_B(c) \in B$$

y se lee " $\mu_A(a)$ es congruente con $\mu_A(b)$ módulo subgrupo difuso *B*".

En el siguiente resultado se puede ver que la relación congruencia módulo subgrupo difuso es una relación de equivalencia considerando ésta última desde el punto de vista de la definición clásica de relación de equivalencia.

Lema 11: La relación "módulo subgrupo difuso" es una relación de equivalencia entre los elementos de *G*.
Demostración: 1. Para todo $a \in G$ se cumple que

$$\mu_A(a)*\mu_A(a^{-1})=\mu_A(e)=\mu_B(e) \in B,$$

con lo que $\mu_A(a)\equiv\mu_A(a)(B)$ por lo tanto la relación "módulo subgrupo difuso" es reflexiva.
2. Sean $a,b \in G$ tales que

$$\mu_A(a)\equiv\mu_A(b)(B),$$

entonces existe un $c \in H$ tal que

$$\mu_A(a)*\mu_A(b^{-1})=\mu_B(c) \in B$$

y como *B* es un subgrupo difuso se cumple que $\mu_B(c^{-1}) \in B$ con lo que

$$\mu_A(c^{-1})=\mu_A(b)*\mu_A(a^{-1}) \in B,$$

es decir que

$$\mu_A(b)\equiv\mu_A(a)(B),$$

por consiguiente podemos afirmar que la relación "módulo subgrupo difuso" es simétrica.
Sean $a, b, c \in G$ tales que

$$\mu_A(a)\equiv\mu_A(b)(B)$$

y

$$\mu_A(b)\equiv\mu_A(c)(B)$$

es decir

$$\mu_A(a)*\mu_A(b^{-1}) \in B$$

y

$$\mu_A(b)*\mu_A(c^{-1}) \in B;$$

como *B* es un subgrupo difuso entonces

$$\begin{aligned}&[\mu_A(a)*\mu_A(b^{-1})]*[\mu_A(b)*\mu_A(c^{-1})]\\ &=\mu_A(a)*[\mu_A(b)*\mu_A(b^{-1})]*\mu_A(c^{-1})\\ &=[\mu_A(a)*\mu_A(e)]*\mu_A(c^{-1})\\ &=\mu_A(a)*\mu_A(c^{-1}) \in B.\end{aligned}$$

Ya que el objetivo principal de este artículo es la extensión de la teoría de grupos y difusos hasta la teoría difusa, se plantea ahora la definición de clases de equivalencia según la congruencia módulo subgrupo desde el punto de vista difuso.

Definición 18: sea *(A;*)* un grupo difuso, sea *(B;*)* un subgrupo difuso de *(A;*)* y $a \in G$. Al conjunto

$$[a]_d=\{\mu_A(x) \in A \mid \mu_A(x)\equiv\mu_A(a)(B)\}$$

se le denomina clase de equivalencia difusa de *a*, según la relación ≡.
Se define a continuación el conjunto de los "múltiplos" de un elemento de un grupo difuso determinado. Esta definición permitirá demostrar en el próximo lema un importante resultado de esta teoría.

Definición 19: dado *(A;*)* un grupo difuso, sea *(B;*)* un subgrupo difuso de *(A;*)* y $a \in G$. Se define el conjunto

$$B\mu_A(a)=\{\mu_A(b)*\mu_A(a):\mu_A(b) \in B\}.$$

El siguiente lema nos muestra la igualdad de los conjuntos mencionados en las dos definiciones anteriores.

Lema 12: Para todo $\mu_A(a) \in A$, $[\mu_A(a)]_d=B\mu_A(a)$.
Demostración: sea $\mu_A(c) \in [\mu_A(a)]_d$ esto es equivalente a $\mu_A(c)\equiv\mu_A(a)(B)$ lo que es equivalente a decir que existe un $\mu_A(b) \in B$ tal que $\mu_A(c)*\mu_A(a^{-1})=\mu_A(b)$, es decir, $\mu_A(c)=\mu_A(b)*\mu_A(a)$ lo que a su vez es equivalente a $\mu_A(c) \in B\mu_A(a)$.

En el siguiente lema podemos ver que las clases de equivalencia de los elementos de un grupo difuso respecto a la relación de equivalencia de congruencia módulo subgrupo difuso son equipotentes.

Lema 13: si $\mu_A(a)$, $\mu_A(b) \in A$, entonces $[\mu_A(a)]_d$ y $[\mu_A(b)]_d$ tienen el mismo cardinal.
Demostración: definimos la función

$$f: B\mu_A(a)\rightarrow B\mu_A(b)$$

tal que

$$f(\mu_B(c)*\mu_A(a))=\mu_B(c)*\mu_A(b)$$

y veamos que estos conjuntos son equipotentes. Supongamos que

$$f(\mu_B(c_1)*\mu_A(a))=f(\mu_B(c_2)*\mu_A(a)),$$

entonces

$$\mu_B(c_1)*\mu_A(b)=\mu_A(c_2)*\mu_A(b),$$

de donde aplicando la ley cancelativa se obtiene que

$$\mu_B(c_1)=\mu_A(c_2),$$

por consiguiente

$$\mu_B(c_1)*\mu_A(a)=\mu_B(c_2)*\mu_A(a),$$

de donde *f* es inyectiva.
Sea

$$\mu_B(c)*\mu_A(b) \in B\mu_A(b)$$

entonces

$$\mu_B(c) \in B$$

y por tanto

$$\mu_B(a) \in B\mu_A(a)$$

por consiguiente

$$f(\mu_B(c)*\mu_A(a))=\mu_B(c)*\mu_A(b)$$

es decir que f es sobreyectiva, con lo que los conjuntos $B\mu_A(a)$ y $B\mu_A(b)$ tienen el mismo cardinal.

Corolario 14: toda clase de equivalencia $[\mu_A(a)]_d$ según el subgrupo difuso $(B;*)$ tiene $0(B)$ elementos.
Demostración: por teorema anterior sabemos que todas las clases de equivalencia $[\mu_A(a)]_d$ según el subgrupo difuso $(B;*)$ tienen el mismo cardinal, en particular para el elemento neutro de $(A;*)$ y como

$$[\mu_A(e)]_d=B\mu_A(e)=\{\mu_A(b)*\mu_A(e):\ \mu_A(b)\in B\}=B,$$

con lo que queda demostrada la afirmación.

III. CONCLUSIONES

Considerando las definiciones y resultados enunciados en el presente documento, podemos notar que esta definición propuesta se pude ver como una extensión natural de la teoría de grupos desde el punto de vista clásico. Además, bajo ciertas condiciones muy particulares se pueden considerar los grupos difusos de Rosenfeld como casos particulares de los grupos difusos definidos en este documento. Existen grandes diferencias entre la teoría enunciada por Rosenfeld y la teoría expuesta en el presente texto. En los grupos clásicos se trabaja con elementos que tienen un grado de pertenencia absoluto hacia determinado conjunto utilizando una operación binaria definida sobre dicho conjunto la cual "arroja", como resultado, elementos que tienen igual grado de pertenencia al conjunto en cuestión, a diferencia de los grupos difusos trabajado en este texto, en los cuales se trabaja con elementos que tienen un grado de pertenencia "parcial" a algún conjunto y que luego de ser trabajados mediante una operación binaria difusa produce un elemento con un grado de pertenencia "parcial" sobre el conjunto dado.

RECOMENDACIONES

Agradecimientos al profesor Juan Alberto Barboza por su colaboración y apoyo en la elaboración de este artículo.

REFERENCIAS

[1] J. Caicedo, Teoría de grupos, *Facultad de ciencias*, Universidad nacional de Colombia, Bogotá.
[2] A. Rosenfeld, Fuzzy groups, *J. Math. Anal.* Appl 35 (1971) 512-517.
[3] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *inform and control*, 8, 338-353, 1965.
[4] T. Hungerford, *Álgebra,Springer-Verlag*, New York,1974.
[5] B. Schweizer, A. Sklar, *probabilistc Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
[6] F.I. Sidki, t-fuzzy mapping, *Fuzzy Sets and Systems* 76 (1995) 387-393.
[7] Dorronsoro, Jorge; Hernández, Eugenio (1996). *Números, grupos y anillos.* Adison-Wesley Iberoamericana.