

Control predictivo de un transformador cambiador de fase

Predictive control of phase shift transformer

Juan Pablo González Tamayo^{1*}, Eduardo Giraldo Suarez²

¹²Ingeniería Electrónica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

jpgonzalez@utp.edu.co

egiraldos@utp.edu.co

Resumen— Para el desarrollo del control predictivo propuesto, se parte de la obtención del modelo matemático linealizado de un transformador cambiador de fase, con el fin de estudiar su respuesta en lazo abierto. Una vez realizada esta etapa se establecen los parámetros del controlador, que tiene como objetivo la restricción de parámetros y la minimización de una función objetivo, es decir, de reducir la desviación frente al comportamiento deseado del sistema en estudio. Posteriormente se implementa un esquema de control óptimo con el fin de desarrollar un análisis comparativo, para verificar la efectividad de los controladores en la respuesta de las diferentes variables del sistema y el rechazo a perturbaciones.

Palabras clave— Control predictivo, control óptimo cuadrático, transformador cambiador de fase.

Abstract— For the development of predictive control proposed, part of obtaining the mathematical linearized model of phase shift transformer, in order to study the open loop response. Once realized this stage the parameters of the controller are established, which aims at restricting parameters and the objective function minimization, it means, to reduce the deviation front the desired behavior of the system under study. Later a quadratic optimal control scheme is implemented, in order to verify effectiveness of the controllers in the response of different variables system and the rejection to disturbances.

Key Word — Predictive control, quadratic optimal control, phase shift transformer.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de potencia son sistemas dinámicos complejos multivariables que consisten en varios generadores de energía y cargas eléctricas conectadas a una red incluyendo transformadores, líneas de transmisión, barrajes y equipo de control. Debido a que el flujo de potencia varía constantemente en el sistema, conlleva a que las tensiones en los diferentes puntos de la red tiendan a

fluctuar, por eso una adecuada acción de control se debe implementar para mantener estos valores dentro de un rango determinado.

El desarrollo de mejores formas para la utilización de los sistemas de transmisión en su máxima capacidad ha llamado la atención en los últimos años, teniendo como resultado los sistemas flexibles de transmisión de corriente alterna (FACTS), que se han consolidado gracias al avance de la electrónica de potencia.

Dentro de los FACTS, el transformador cambiador de fase (PST) juega un rol muy importante, ya que este sistema inyecta una tensión variable para cambiar el ángulo de fase de la tensión en la línea de transmisión, lo que modifica la diferencia del ángulo de fase entre el envío y recepción final de las tensiones de la línea de transmisión.

El objetivo del controlador en todo el sistema de potencia es asegurar su estabilidad, mantener la frecuencia en un punto establecido, mantener el balance en la potencia y la tensión próxima a unos valores deseados si se llegaran a presentar cambios en las condiciones de carga.

Para obtener las condiciones de operación del sistema en mención, se implementarán algoritmos de control óptimo al modelo linealizado del PST, como el control predictivo basado en el modelo y como método de comparación el control óptimo cuadrático.

El control óptimo tiene como propósito la maximización o la minimización de un índice de desempeño que tenga que ver con algún proceso, por lo tanto se pretende encontrar unas condiciones de operación óptimas para el funcionamiento del sistema, el cual sea dependiente de una función de coste (índice de desempeño) y que deba cumplir con un conjunto de restricciones dependiendo del sistema a optimizar.

II. DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

A. Modelamiento del sistema

Un generador conectado a un barraje infinito mostrado en la Figura 1 es el sistema considerado para el estudio en este artículo. El generador síncrono es representado por un sistema

de sexto orden y está equipado por un regulador automático de tensión. Un modelo generalizado del PST está compuesto por un transformador de excitación (ET), un transformador en serie (ST) y un tiristor bloqueado por compuerta (GTO).

Para una mayor facilidad en el análisis del sistema de potencia, se implementará un modelo simplificado del PST presentado en [1], además se considerarán únicamente las reactancias en serie de los elementos del sistema y adicionalmente se asumirá que la potencia mecánica es constante y la impedancia del transformador en serie no se tendrá en cuenta.

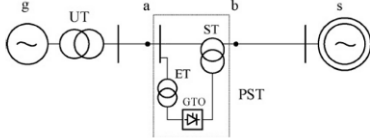


Figura 1. Modelo del generador conectado a un barraje infinito equipado con un transformador cambiador de fase [2].

B. Ecuaciones Algebraicas y diferenciales

De acuerdo a [1], el PST puede ser modelado utilizando la relación de transformación η :

$$\eta = \frac{U_a}{U_b} = \eta \cdot e^{j\theta} \tag{1}$$

La relación η se divide en dos componentes ortogonales: directa β y de cuadratura γ . La componente directa es igual a cero y la componente de cuadratura es perpendicular a la tensión de la línea de transmisión y corresponde al desplazamiento del cambio de fase. Esta resulta de la descomposición de la tensión inyectada por el PST que corresponde a $\Delta U_T = j\gamma U_a$. Usando las componentes definidas anteriormente, la relación η se define:

$$\eta = 1 + j\gamma \tag{2}$$

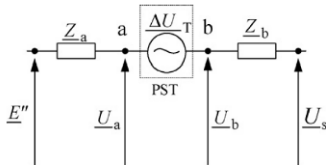


Figura 2. Circuito equivalente del estado subtransitorio del sistema [2].

Usando la ecuación 2 como modelo del PST, el sistema en estado subtransitorio anteriormente mencionado es mostrado en la Figura 2. Basado en las leyes de Kirchoff's las ecuaciones del sistema vienen dadas por:

$$E'' = U_s + IZ_b + \Delta U_T + IZ_a \tag{3}$$

$$U_a = E'' - IZ_a \tag{4}$$

Donde $E'' = E_q'' + jE_d''$; $U_s = U_{sq} + jU_{sd}$; $I = I_q + jI_d$; $Z_b = R_b + jX_b$ y $Z_a = R_a + jX_a$. La impedancia Z_a consiste de la impedancia subtransitoria del generador, la impedancia unitaria del transformador y una parte de la impedancia de la línea, la cual corresponde a la distancia relativa entre el nodo, en donde el PST y el transformador unitario es instalado. Asumiendo también, $X'' = (X_q'' + X_d'')/2$, $Z_a = (r + R_{UT} + R_{La}) + j(X'' + X_{UT} + X_{La})$. Usando 3 y 4, las componentes de las corrientes de los ejes d y q se describen así:

$$I_q = \frac{1}{|Z_\gamma|^2} \{ [(E_q'' - U_s \cos \delta) + \gamma E_d''] (R_\Sigma + \gamma X_a) + [(E_d'' + U_s \sin \delta) - \gamma E_q''] (X_\Sigma + \gamma X_a) \}, \tag{5}$$

$$I_d = \frac{1}{|Z_\gamma|^2} \{ [(E_d'' - U_s \sin \delta) - \gamma E_q''] (R_\Sigma + \gamma X_a) - [(E_q'' - U_s \cos \delta) + \gamma E_d''] (X_\Sigma + \gamma X_a) \}, \tag{6}$$

Donde:

$$|Z_\gamma| = \sqrt{(R_a + \gamma X_a)^2 + (X_\Sigma - \gamma R_a)^2}, R_\Sigma = R_a + R_b, X_\Sigma = X_a + X_b$$

La tensión de entrada del generador del sistema está dado por:

$$U = \sqrt{U_q^2 + U_d^2}, \tag{7}$$

Las componentes de la tensión en el generador están dadas por:

$$U_q = E_q'' + X'' I_d - r I_q, \tag{8}$$

$$U_d = E_d'' - r I_d - X'' I_q, \tag{9}$$

La potencia entregada por el generador a la red es:

$$P_e = I_q U_q + I_d U_d, \tag{10}$$

Las ecuaciones diferenciales del generador teniendo en cuenta los ejes $d - q$ están dadas por:

$$T_{d0} \frac{dE_q''}{dt} = E_q' + \Delta X_d'' I_d - E_q'', \tag{11}$$

$$T_{q0} \frac{dE_d''}{dt} = E_d' - \Delta X_q'' I_q - E_d'', \tag{12}$$

$$T_{d0} \frac{dE_q'}{dt} = E_f + \Delta X_d' I_d - E_q', \tag{13}$$

$$T_{q0} \frac{dE_d'}{dt} = -\Delta X_q' I_q - E_d', \tag{14}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_0 \Delta \omega, \tag{15}$$

$$M \frac{d\Delta \omega}{dt} = P_m - P_e, \tag{16}$$

Donde

$$\Delta X_q'' = X_q' - X'', \Delta X_d'' = X_d' - X'', \Delta X_q' = X_q - X_q' \text{ y } \Delta X_d' = X_d - X_d'$$

El PST es representado como un modelo dinámico de primer orden y la ecuación diferencial que lo representa está dada por:

$$T\gamma \frac{d\gamma}{dt} = u_\gamma - \gamma, \quad (17)$$

C. Modelo de espacio de estados

Después de llevar a cabo una manipulación matemática y una linealización parcial de las ecuaciones 1 a 17 desarrollada en [2], la función de transferencia resultante del modelo del sistema es expresado en un diagrama de bloques ilustrado en la Figura 3.

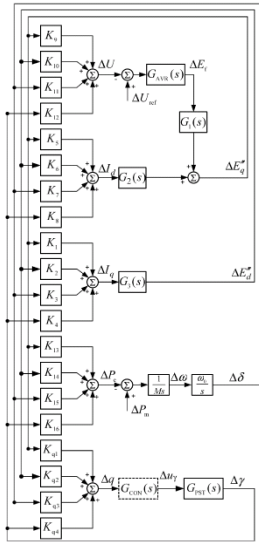


Figura 3. Diagrama de bloques del sistema linealizado [2].

En donde las contantes K_1 a K_{16} y K_{q1} a K_{q4} son el resultado de la linealización de las ecuaciones algebraicas y diferenciales que describen el sistema y están dadas por:

$$K_1 = k_Z [R_\Sigma + \gamma_0 (X_a - X_\Sigma + \gamma_0 R_a)], \quad (18)$$

$$K_2 = k_Z [X_\Sigma + \gamma_0 (R_\Sigma - R_a + \gamma_0 X_a)], \quad (19)$$

$$K_3 = k_Z U_S [(R_\Sigma \sin \delta_0 + X_\Sigma \cos \delta_0) + \gamma_0 (X_a \sin \delta_0 - R_a \cos \delta_0)], \quad (20)$$

$$K_4 = k_Z [E_{q0}'' (X_a - X_\Sigma + 2\gamma_0 R_a) + E_{d0}'' (R_\Sigma - R_a + 2\gamma_0 X_a) + U_S (-X_a \cos \delta_0 - R_a \sin \delta_0) + (-2) (X_a (R_\Sigma + \gamma_0 X_a) - R_a (X_\Sigma - \gamma_0 R_a)) I_{q0}], \quad (21)$$

$$K_5 = -K_2, \quad (22)$$

$$K_6 = K_1, \quad (23)$$

$$K_7 = k_Z U_S [(R_\Sigma \cos \delta_0 - X_\Sigma \sin \delta_0) + \gamma_0 (X_a \cos \delta_0 + R_a \sin \delta_0)], \quad (24)$$

$$K_8 = k_Z [E_{q0}'' (R_a - R_\Sigma - 2\gamma_0 X_a) + E_{d0}'' (X_a - X_\Sigma + 2\gamma_0 R_a) + U_S (X_a \sin \delta_0 - R_a \cos \delta_0) + (-2) (X_a (R_\Sigma + \gamma_0 X_a) - R_a (X_\Sigma - \gamma_0 R_a)) I_{d0}], \quad (25)$$

$$K_9 = \left(\frac{1}{U_0}\right) (U_{q0} K_{Uq1} + U_{d0} K_{Ud1}), \quad (26)$$

$$K_{10} = \left(\frac{1}{U_0}\right) (U_{q0} K_{Uq2} + U_{d0} K_{Ud2}), \quad (27)$$

$$K_{11} = \left(\frac{1}{U_0}\right) (U_{q0} K_{Uq3} + U_{d0} K_{Ud3}), \quad (28)$$

$$K_{12} = \left(\frac{1}{U_0}\right) (U_{q0} K_{Uq4} + U_{d0} K_{Ud4}), \quad (29)$$

$$K_{13} = U_{q0} K_1 + K_{Uq1} I_{q0} + U_{d0} K_5 + K_{Ud1} I_{d0}, \quad (30)$$

$$K_{14} = U_{q0} K_2 + K_{Uq2} I_{q0} + U_{d0} K_6 + K_{Ud2} I_{d0}, \quad (31)$$

$$K_{15} = U_{q0} K_3 + K_{Uq3} I_{q0} + U_{d0} K_7 + K_{Ud3} I_{d0}, \quad (32)$$

$$K_{16} = U_{q0} K_4 + K_{Uq4} I_{q0} + U_{d0} K_8 + K_{Ud4} I_{d0}, \quad (33)$$

Donde el subíndice 0 indica el valor de la variable en el punto de operación y $k_Z = \frac{1}{Z^2}$. Las constantes auxiliares utilizadas en las ecuaciones 18 a 33 están dadas por las siguientes expresiones:

$$K_{Uq1} = 1 + X'' K_5 - r K_1, \quad (34)$$

$$K_{Uq2} = X'' K_6 - r K_2, \quad (35)$$

$$K_{Uq3} = X'' K_7 - r K_3, \quad (36)$$

$$K_{Uq4} = X'' K_8 - r K_4, \quad (37)$$

$$K_{Ud1} = -r K_5 - X'' K_1, \quad (38)$$

$$K_{Ud2} = 1 - r K_6 - X'' K_2, \quad (39)$$

$$K_{Ud3} = -r K_7 - X'' K_3, \quad (40)$$

$$K_{Ud4} = -r K_8 - X'' K_4, \quad (41)$$

La ecuación lineal que describe cualquier señal de entrada q del PST está dada por:

$$\Delta q = K_{q1} \Delta E_q'' + K_{q2} \Delta E_d'' + K_{q3} \Delta \delta + K_{q4} \Delta \gamma, \quad (42)$$

En donde:

$$K_{q1} = \frac{\partial q_i}{\partial E_q''} \Big|_{x=x_0, u=u_0}, \quad (43)$$

Razones constructivas, de seguridad, medioambientales o bien los propios alcances de los sensores pueden causar límites en las variables del proceso. Además, normalmente las condiciones de operación vienen definidas por la intersección de ciertas restricciones por motivos fundamentalmente económicos, con lo que el sistema de control operará cerca de los límites [3]. Se considerarán límites en la amplitud, el *slew rate* de la señal de control y límites en las salidas:

$$K_{q2} = \frac{\partial q_i}{\partial E_d''} \Big|_{x=x_0, u=u_0}, \quad (44)$$

$$K_{q3} = \frac{\partial q_i}{\partial \delta} \Big|_{x=x_0, u=u_0}, \quad (45)$$

$$K_{q4} = \frac{\partial q_1}{\partial \gamma} \Big|_{x=x_0, u=u_0}, \tag{46}$$

La función de transferencia $G_{PST}(s)$ describe la inercia del PST y viene dada por:

$$G_{PST}(s) = \frac{1}{1+sT_\gamma} = \frac{b_{0\gamma}}{a_{1\gamma}s+a_{0\gamma}}, \tag{47}$$

El diagrama de bloques del sistema de excitación tomado en consideración, se ilustra en la

Figura 4:

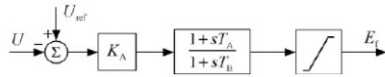


Figura 4. Diagrama de bloques del regulador automático de tensión del generador síncrono [2].

Donde su función de transferencia es expresada como:

$$G_{AVR}(s) = K_A \frac{1+sT_A}{1+sT_B} = \frac{b_1s+b_0}{a_1s+a_0}, \tag{48}$$

Introduciendo una nueva variable de estado z_1 en el sistema de la

Figura 4, el sistema se describe por las siguientes ecuaciones lineales:

$$\frac{d\Delta z_1}{dt} = \frac{1}{a_1} (-\Delta U) - \frac{a_0}{a_1} \Delta z_1, \tag{49}$$

$$\Delta E_f = \frac{b_1}{a_1} (-\Delta U) - \left(\frac{a_0 b_1 - b_0}{a_1} \right) \Delta z_1, \tag{50}$$

En la parte inferior de la Figura 3, el bloque en línea punteada corresponde al controlador predictivo basado en el modelo del sistema, que rescribiéndolo como un modelo de espacios de estado se puede expresar por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{51}$$

$$y = Cx, \tag{52}$$

En donde el vector de estado y de control está dado por:

$$x = [\Delta E_q \ \Delta E_d \ \Delta E_q' \ \Delta E_d' \ \Delta \delta \ \Delta \varpi \ \Delta z_1 \ \Delta \gamma], \tag{53}$$

$$u = [\Delta u_\gamma], \tag{54}$$

Los coeficientes A , B y C que corresponden a las ecuaciones 51 y 52 están dados por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_d' K_5 - 1}{T_{d0}'} & \frac{\Delta X_d' K_6}{T_{d0}'} & \frac{1}{T_{d0}'} & 0 & \frac{\Delta X_d' K_7}{T_{d0}'} & 0 & 0 & \frac{b_{0\gamma}(\Delta X_d' K_8)}{T_{d0}'} \\ -\frac{\Delta X_d' K_1}{T_{d0}'} & -(\frac{\Delta X_d' K_2 + 1}{T_{d0}'}) & 0 & \frac{1}{T_{d0}'} & -\frac{\Delta X_d' K_3}{T_{d0}'} & 0 & 0 & -\frac{b_{0\gamma} \Delta X_d' K_4}{T_{d0}'} \\ \frac{A_1}{T_{d0}'} & \frac{A_2}{T_{d0}'} & -\frac{1}{T_{d0}'} & 0 & \frac{A_3}{T_{d0}'} & 0 & -\frac{A_4}{T_{d0}'} & \frac{A_5}{T_{d0}'} \\ -\frac{\Delta X_d' K_1}{T_{d0}'} & -\frac{\Delta X_d' K_2}{T_{d0}'} & 0 & -\frac{1}{T_{d0}'} & -\frac{\Delta X_d' K_3}{T_{d0}'} & 0 & 0 & -\frac{b_{0\gamma} \Delta X_d' K_4}{T_{d0}'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varpi_0 & 0 \\ -\frac{K_{13}}{M} & -\frac{K_{14}}{M} & 0 & 0 & -\frac{K_{15}}{M} & 0 & 0 & -\frac{b_{0\gamma} K_{16}}{M} \\ -\frac{K_9}{a_1} & -\frac{K_{10}}{a_1} & 0 & 0 & -\frac{K_{11}}{a_1} & 0 & -\frac{a_0}{a_1} & -\frac{b_{0\gamma} K_{12}}{a_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{0\gamma}}{a_{1\gamma}} \end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$A_1 = \Delta X_d' K_5 - K_9 (b_1/a_1),$$

$$A_2 = \Delta X_d' K_6 - K_{10} (b_1/a_1),$$

$$A_3 = \Delta X_d' K_7 - K_{11} (b_1/a_1),$$

$$A_4 = (b_1 (a_0/a_1) - b_0),$$

$$A_5 = b_{0\gamma} (\Delta X_d' K_8 - K_{12} (b_1/a_1)),$$

$$B = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{a_{1\gamma}} \right]^T, \tag{56}$$

$$C = \left[K_{q1} \ K_{q2} \ 0 \ 0 \ K_{q3} \ 0 \ 0 \ K_{q4} \right], \tag{57}$$

Un esquema del sistema con el controlador se muestra en la Figura 5.

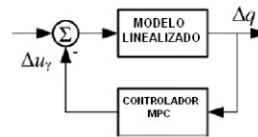


Figura 5. Esquema básico del controlador.

III. MÉTODOS DE CONTROL ÓPTIMO

A. Control predictivo basado en modelos

El término Control Predictivo basado en modelos MPC [4], no designa a una estrategia de control particular sino a un conjunto de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo. La metodología de los controladores pertenecientes a la familia de MPC se caracterizan por la siguiente estrategia:

1. Las salidas futuras para un horizonte determinado N , llamado horizonte de predicción, se predicen cada instante t utilizando el modelo del proceso. Estas predicciones de la salida $y(t+k/t)$ para $k = 1 \dots N$ (esta notación indica el valor predicho de la variable en el instante $t+k$ calculada en el instante t) dependen de los valores conocidos hasta el instante t (entradas y salidas conocidas) y de las señales de control $u(t+k/t)$, $k = 0 \dots N-1$; que han de ser calculadas y enviadas al sistema.

2. La secuencia de señales de control futuras se calcula minimizando un criterio para mantener al proceso lo más cerca posible de la trayectoria de referencia $w(t+k)$. Este criterio toma normalmente la forma de una función cuadrática del error entre la salida predicha y la trayectoria de referencias futuras. En la mayor parte de los casos se incluye también el esfuerzo de control dentro de la función objetivo. La solución explícita se puede obtener cuando el criterio es cuadrático y el modelo

lineal; en caso contrario se ha de utilizar un método numérico para buscar la solución. La expresión general de tal función objetivo será:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \tag{58}$$

N_1 y N_2 son los horizontes mínimo y máximo de coste (o de predicción) y N_u es el horizonte de control, que no tiene por qué coincidir con el horizonte máximo. El significado de N_1 y N_2 resulta bastante intuitivo: marcan los límites de los instantes en que se desea que la salida siga a la referencia. Los coeficientes $\delta(j)$ y $\lambda(j)$ son secuencias que ponderan el comportamiento futuro. Usualmente se consideran valores constantes o secuencias exponenciales.

3. La señal de control $u(t/t)$ se envía al proceso mientras que el resto de las señales calculadas no se consideran, ya que en el instante siguiente de muestreo y $(t+1)$ es ya conocida y los pasos anteriores se repiten con este nuevo valor. Por lo que $u(t+1/t+1)$ se calcula con información diferente y en principio será también diferente de $u(t+1/t)$.

La Figura 6 muestra la estructura básica necesaria para implementar el control predictivo. Se usa un modelo para predecir la evolución de la salida o estado del proceso a partir de las señales de entrada y salidas conocidas. Las acciones de control futuras se calculan con el optimizador, que considera la función de coste y las posibles restricciones.

Para formular el algoritmo MPC con restricciones hay que expresar éstas en función de la variable sobre la que se puede actuar, es decir, en función de u . Las restricciones en la entrada están ya expresadas en función de u y para las restricciones en la salida se hace uso de las ecuaciones de predicción que expresan el valor futuro de las salidas en función de las señales de control futuras y valores conocidos en el instante t . Las restricciones que aparecen serán básicamente amplitud, velocidad de cambio en la señal de control y amplitud en la salida y se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} u_{min} &\leq u(t) \leq u_{max} && \forall t \\ du_{min} &\leq u(t) - u(t-1) \leq du_{max} && \forall t \\ y_{min} &\leq y(t) \leq y_{max} && \forall t \end{aligned}$$

Siendo:

- u_{min} : Señal de control mínima.
- u_{max} : Señal de control máxima.
- du_{min} : Velocidad de cambio de la señal de control mínima.
- du_{max} : Velocidad de cambio de la señal de control máxima.
- y_{min} : Salida mínima.
- y_{max} : Salida máxima.

Con la adición de estas restricciones a la función objetivo, la minimización resulta más compleja, no pudiendo obtenerse la solución analíticamente como en el caso sin restringir.

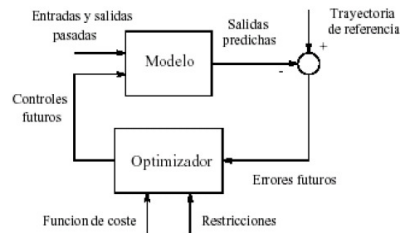


Figura 6. Estructura básica del MPC [4].

El modelo del proceso juega, en consecuencia, un papel decisivo en el controlador. El modelo elegido debe ser capaz de capturar la dinámica del proceso para predecir de forma precisa la evolución del sistema.

El optimizador es otra parte fundamental de la estructura ya que permite obtener las acciones de control a aplicar. El tamaño del problema resultante depende del número de variables, de los horizontes de control y predicción y del número de restricciones, aunque se puede decir que en general los problemas de optimización resultantes en este contexto son problemas más bien modestos [3].

B. Control óptimo cuadrático

El problema de control óptimo cuadrático se puede enunciar como sigue [5], dado un sistema de control lineal de tiempo discreto:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = c \tag{59}$$

Donde se supone que es de estado completamente controlable y

- $x(k)$ = vector de estado (vector - n)
- $u(k)$ = vector de control (vector - r)
- G = matriz de $n \times n$
- H = matriz de $n \times r$

Se encuentra la secuencia de control óptima $u(0), u(1), u(2), \dots, u(N-1)$ que minimiza un índice de desempeño cuadrático. Se puede considerar un índice de desempeño cuadrático para un proceso de tiempo finito ($0 \leq k \leq N$) el siguiente:

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \tag{60}$$

Donde:

- Q = matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva $n \times n$.
- R = matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva de $r \times r$.

S = matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva de $n \times n$.

El primer término de del lado derecho de la ecuación 60 toma en cuenta la importancia del estado final.

El primer término dentro de los corchetes de la sumatoria toma en cuenta la importancia relativa del error durante el proceso de control y el segundo término toma en cuenta la energía de la señal de control.

Las matrices Q, R, S se seleccionan para valorar la importancia relativa de la contribución en el desempeño debido al vector de estado $x(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$), al vector de control $u(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$), y al estado final $x(N)$, respectivamente.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$R = [r]$$

Donde:

$$q_{ii} = \frac{1}{|\Delta x_i|^2} \quad \Delta x_i = x_{imax} - x_{ref}$$

$$r = \frac{1}{|\Delta r|^2} \quad \Delta r = u_{max} - u_{ref}$$

El estado inicial del sistema está en un valor arbitrario $x(0) = c$. El estado final $x(N)$ puede ser fijo, en cuyo caso el término $\frac{1}{2} x^T(N) S x(N)$ se elimina del índice de desempeño de la ecuación 60 y en su lugar se impone la condición terminal $x(N) = x_f$, donde x_f es el estado terminal fijo. Si el estado terminal $x(N)$ no es fijo, entonces el primer término en la ecuación 60 representa el peso de la contribución en el desempeño debida al estado final.

La ley de control óptimo está dada por:

$$u(k) = -K(k)x(k) \tag{61}$$

donde $K(k)$ es una matriz de $r \times n$ variante en el tiempo. Si $N = \infty$, entonces $K(k)$ es una matriz constante de $r \times n$. El diseño de sistemas de control basado en dichos índices de desempeño cuadrático depende de obtener la matriz $K(k)$.

IV. RESULTADOS

A. Análisis del sistema de potencia

En primera instancia se procede a excitar el sistema en lazo abierto al escalón unitario.

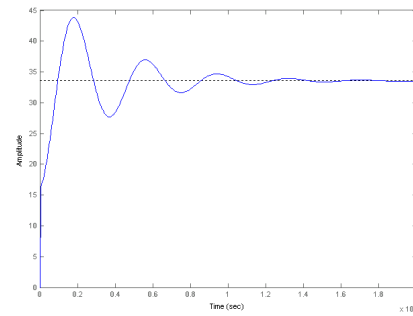


Figura 7. Respuesta al escalón unitario.

De la Figura 7 se observa que el sistema es subamortiguado, sin embargo esta respuesta puede ser controlada con el fin de reducir el tiempo de establecimiento.

El sistema en estudio representado en un modelo de espacio de estados, permite establecer si sobre dicho modelo existen o no condiciones de controlabilidad, es decir, es posible llevar el sistema de un estado arbitrario a cualquier estado deseado.

Este sistema será controlable si todas sus variables de estado pueden controlarse y tenerse alrededor de un punto de operación. Una vez se verifica la controlabilidad, se procede a la implementación del controlador correspondiente.

La representación en espacios de estados del sistema:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{E}_q \\ \Delta \dot{E}_d \\ \Delta \dot{E}_q' \\ \Delta \dot{E}_d' \\ \Delta \dot{\delta} \\ \Delta \dot{\omega} \\ \Delta \dot{z}_1 \\ \Delta \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,81 & -1,38e-6 & 23,81 & 0 & 3,08e-6 & 0 & 0 & -9,91e-5 \\ 3,52e-6 & -15,38 & 0 & 15,38 & -3,04e-6 & 0 & 0 & 2,30e-4 \\ -2,24 & -2,26 & -0,11 & 0 & 3,84e-7 & 0 & 19,57 & -3,79e-5 \\ 1,52e-6 & -8,03e-6 & 0 & -0,91 & -1,31e-6 & 0 & 0 & 9,80e-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 377 & 0 & 0 \\ -0,19 & -0,19 & 0 & 0 & -5,20e-7 & 0 & 0 & -5,20e-7 \\ -0,10 & -0,10 & 0 & 0 & -4,07e-9 & 0 & -0,1 & -1,04e-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E_q \\ \Delta E_d \\ \Delta E_q' \\ \Delta E_d' \\ \Delta \delta \\ \Delta \omega \\ \Delta z_1 \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \Delta u_{\gamma}$$

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E_q \\ \Delta E_d \\ \Delta E_q' \\ \Delta E_d' \\ \Delta \delta \\ \Delta \omega \\ \Delta z_1 \\ \Delta \gamma \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad se obtiene de la siguiente forma:

$$C_o = [B \ A B \ A^2 B \ A^3 B \ A^4 B \ A^5 B \ A^6 B \ A^7 B \ A^8 B]$$

Esta condición de controlabilidad puede ser verificada si el vector que conforma esta matriz es linealmente independiente, es decir si dicha matriz es de orden completo, lo cual se desarrolla utilizando el comando *crtb* y *rank* de Matlab.

$$C_o = \text{crtb}(A, B) \\ \text{rank}(C_o) = 8$$

B. Representación del sistema linealizado en Matlab

Habiendo realizado el análisis previo, se utiliza el software Matlab para representar el sistema dado y especificando detalladamente todos los parámetros del sistema:


```

3  %% Parametros del sistema de potencia
4  % Parametros de la linea en ohmios/Km, Longitud 100 Km
5  R=0.0564;
6  X=0.418;
7  % El subindice 0 indica el valor de la variable en su punto de operación
8  %% Constantes auxiliares para la obtención de la matriz A
9  % Valores de las reaktancias en pu
10 % Reaktancias sincronicas del generador en los ejes d y q
11 Xd=2.6;
12 Xq=2.49;
13 % Reaktancias transitorias del generador en los ejes d y q
14 Xdp=0.33;
15 Xqp=0.53;
16 % Reaktancias subtransitorias del generador en los ejes d y q
17 Xdpp=0.235;
18 Xqpp=0.29;
19 Xpp= (Xdpp+Xqpp)/2; % Componente media de la reaktancia subtransitoria
20 %% Constantes
21 w0=377; % Velocidad angular del rotor nominal
22 M=5; % Coeficiente de inercia
23 %%
24 Dxdpp= Xdp-Xpp;
25 Td0pp=0.042; % Constante subtransitoria de tiempo en circuito abierto
26 % Segunda Fila
27 Dxdpp=Xdp-Xpp;
28 Tq0pp=0.065; % Constante subtransitoria de tiempo en circuito abierto
29 % Tercera Fila
30 Dxdp=Xd-Xdp;
31 Td0p=9.2; % Constante transitoria de tiempo en circuito abierto
32 % Cuarta Fila
33 Dxdp=Xd-Xdp;
34 Tq0p=1.095; % Constante transitoria de tiempo en circuito abierto
    
```

Figura 8. Parámetros del sistema líneas 3-34.

```

35 %% Parametros de las constantes k1 a k16
36 Pa=2.82;
37 Pb=2.82;
38 Xa=20.9;
39 Xb=20.9;
40 r=0.1; % Resistencia del generador sincronic
41 g=4; % gamma Componente de cuadratura de la relación n del PST
42 g0=2; % gamma0 Componente de cuadratura de la relación n del PST
43 Ua=1; % Tensión de la barra infinita
44 d0=6; % delta0 Ángulo de la potencia del rotor respecto al eje
45 % de referencia sincronic definido por Us
46 Eq0pp=0.98; % Componente subtransitoria de la fem en el eje q
47 Ed0pp=0.97; % Componente subtransitoria de la fem en el eje d
48 Iq0=0.93; % Componente de la corriente de armadura del eje q
49 Id0=0.95; % Componente de la corriente de armadura del eje d
50 Uq0=0.96; % Componente de la tensión del generador en el eje q
51 Ud0=0.97; % Componente de la tensión del generador en el eje d
    
```

Figura 9. Parámetros del sistema líneas 35-51.

```

86 %% Parametros del AVR (Automatic Voltage Regulator)
87 ka=200;
88 % Las constantes de tiempo estan dadas en segundos
89 TA=1;
90 TB=10;
91 %% Parametros del PST
92 Tg=0.01; % Tgamma Constante de inercia de tiempo en segundos
    
```

Figura 10. Parámetros del sistema líneas 86-92.

```

101 %% Ctes obtenidas por comparación entre las funciones de transferencia PST
102 a1g=0.01;
103 a0g=1;
104 b0g=1;
105 %% Ctes obtenidas por comparación entre las funciones de transferencia AVR
106 a1=10;
107 a0=1;
108 b1=200;
109 b0=200;
110 %% Ctes Auxiliares
111 Rq1=2;
112 Rq2=4;
113 Rq3=8;
114 Rq4=16;
    
```

Figura 11. Parámetros del sistema líneas 101-114.

Con los parámetros anteriores, se declaran las matrices A, B, C y D que más adelante se llamarán desde un bloque de Simulink para implementar el algoritmo de control.

C. Algoritmo de control predictivo

Una vez realizado el modelamiento del sistema en Matlab, se procede a diseñar el controlador. Este algoritmo consiste en predecir la salida futura del proceso para un cierto período de tiempo denominado horizonte de predicción. Para la evaluación del control del sistema de potencia se utiliza el modelo linealizado expresado en variables de espacio de estado, el cual está ajustado para las condiciones de operación de estado estacionario del proceso no lineal anteriormente desarrollado. Debido a que esta técnica hace un amplio uso del álgebra matricial, para el diseño del

controlador se utiliza el Toolbox MPC de Matlab, que está basado en diferentes comandos y funciones que permiten diseñar y probar controladores basados en la teoría de control predictivo.

1. Construcción e inicialización

Para este diseño se utiliza el comando *mpc*, que simula el sistema en lazo cerrado usando el modelo descrito en un formato denominado *mod*, que es una forma compacta de almacenar el modelo de un sistema lineal para su uso posterior con las funciones del Toolbox de Matlab.

Este comando *mpc* resuelve el problema de optimización mediante programación cuadrática. En la Figura 12 se puede observar el esquema del controlador donde se declaran las condiciones en las restricciones, el horizonte de predicción, el horizonte de control y el tiempo de muestreo; controlador que posteriormente se llamará desde Simulink en el bloque que proporciona el Toolbox para realimentar el sistema.

```

133 %% Controlador MPC
134 ManipulatedVariables=struct('Min',-1,'Max',1,'Units','Nm');
135 OutputVariables(1)=struct('Min',-1,'Max',1,'Units','rad/s');
136 Weights=struct('Input',0,'InputRate',0.01,'Output',1);
137 clear Model
138 Model.Plant=sys;
139 Model.Plant.OutputGroup=(1 'Measured');
140 Ts=0.02;
141 PredictionHorizon=40;
142 ControlHorizon=2;
143 PSTMPC=mpc(Model,Ts,PredictionHorizon,ControlHorizon);
144 PSTMPC.Weights=Weights;
145 PSTMPC.ManipulatedVariables=ManipulatedVariables;
146 PSTMPC.OutputVariables=OutputVariables;
    
```

Figura 12. Diseño del controlador.

En la Figura 13 se puede apreciar el diseño completo en Simulink.

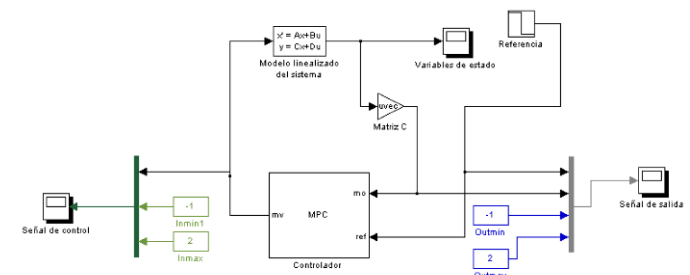


Figura 13. Controlador realimentando del sistema.

De la Figura 13 se pueden observar los diferentes bloques utilizados. El bloque del controlador MPC llama el controlador diseñado PSTMPC (Figura 12) en donde dependiendo de las restricciones del sistema, se puede realizar la sintonización hasta lograr el ajuste deseado, y el bloque llamado “*Modelo linealizado del sistema*”, es en donde se llaman las matrices de estado A, B, C y D, que como se explicó anteriormente es la representación del modelo linealizado del sistema de potencia.

2. Resultados del controlador

Para el sistema de estudio, se desea que la salida se mantenga en estado estacionario de acuerdo a una señal de referencia como se observa en la Figura 14.

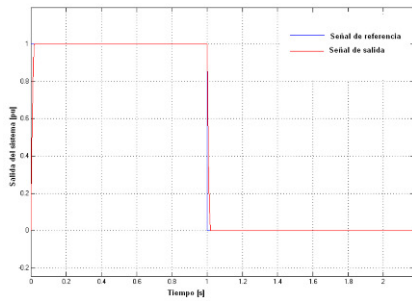


Figura 14. Señal de referencia y salida del sistema.

De la Figura 14 se puede observar como el sistema realiza el seguimiento ante una señal escalón. Además el controlador debe mantener todas las variables de estado alrededor del punto de operación como se muestra en las siguientes figuras.

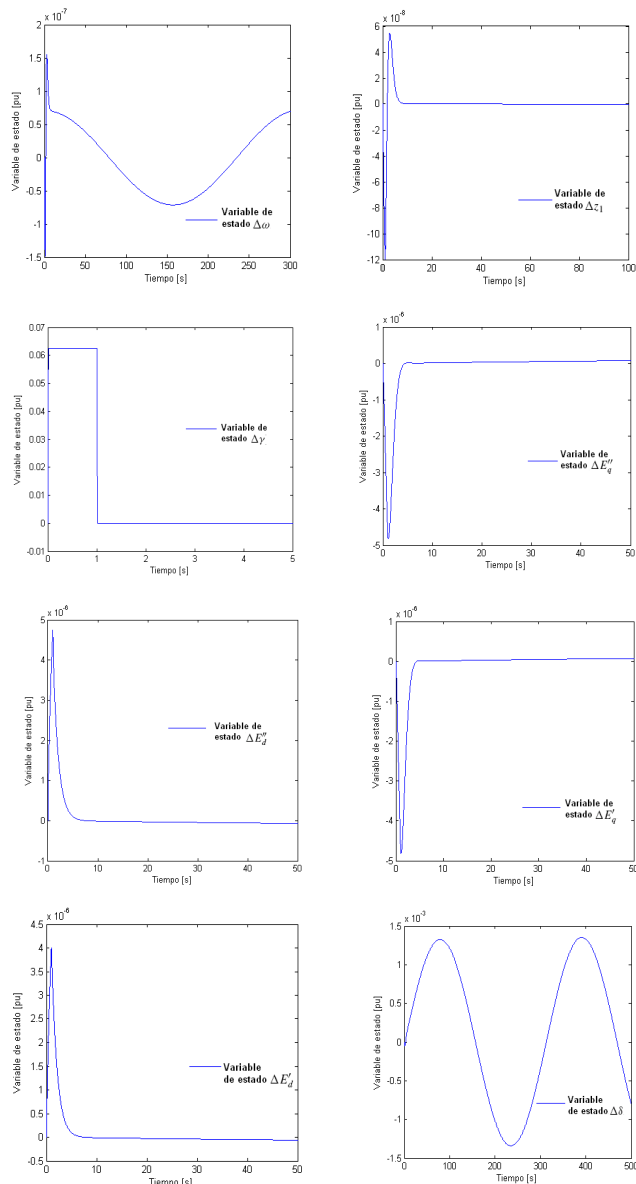


Figura 15. Comportamiento de las variables de estado.

De la Figura 15 se puede observar como las variables de estado oscilan alrededor de valores de 10^{-3} y 10^{-9} , corroborando el buen desempeño que tiene el controlador sobre el sistema.

La Figura 16 muestra el esfuerzo de la señal de control.

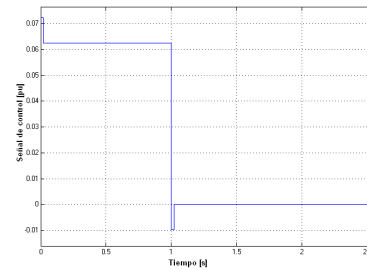


Figura 16. Señal de control.

Si se agrega una perturbación (secuencia de números aleatorios) al sistema, se observa una adecuada respuesta de la salida al seguimiento de la referencia. Sin embargo, aparece un grado mínimo de oscilación alrededor de la señal de salida sin afectar considerablemente el desempeño del controlador. Esta situación se puede observar en la Figura 17.

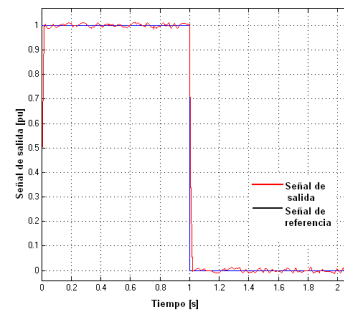


Figura 17. Salida del sistema ante perturbación.

Para este caso las variables presentan un comportamiento similar al de la Figura 15, al presentar una oscilación sin mayor transcendencia. La variable $\Delta\gamma$ es la que presenta mayor amplitud en la señal (Figura 18).

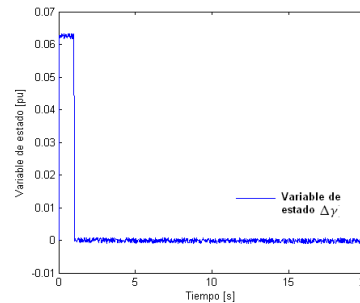


Figura 18. Variable de estado ante perturbación.

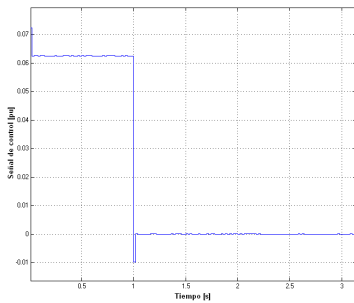


Figura 19. Señal de control ante perturbación.

D. Controlador óptimo cuadrático

Como método comparativo se desea observar el comportamiento del sistema previamente analizado, frente al controlador óptimo cuadrático cuyos resultados se presentarán a continuación.

1. Construcción e inicialización

Para este diseño se emplea el comando *dlqr*, que resuelve el problema del regulador cuadrático lineal en tiempo discreto y la ecuación de Ricatti mostrada en [2]. Habiendo definido las matrices de estado y ya verificado que el sistema es controlable, se calcula usando la formula de Ackerman, las ganancias de realimentación tal que los polos se ubiquen como se muestran en la Figura 20.

```

130 %% Controlador optimo cuadrático
131 - Ts=0.01;
132 - sys=ss(A,B,C,D);
133 - sysd=c2d(sys,Ts);
134 - a=sysd.a;
135 - b=sysd.b;
136 - c=sysd.c;
137 - d=sysd.d;
138 - rank(obsv(a,c))
139 - lt=acker(a',c',[0.051 0.0521 0.0522 0.0523 0.0524 0.0525 0.0526 0.0527]);
140 - L=lt';
141 - a_1=[a zeros(8,1):-c 1];
142 - b_1=[b;0];
143 - rank(ctrb(a_1,b_1))
144 - Q=eye(9); % qii peso de cada una de las variables de estado
145 - R=0.01; % peso que se le da a la señal de entrada
146 - [kt,p]=dlqr(a_1,b_1,Q,R); % valor de K que minimiza la funcion de costo
147 - kd=kt(1:8);
148 - ki=-kt(9);
    
```

Figura 20. Diseño del controlador óptimo cuadrático.

En la Figura 21 se puede observar el diseño completo en Simulink.

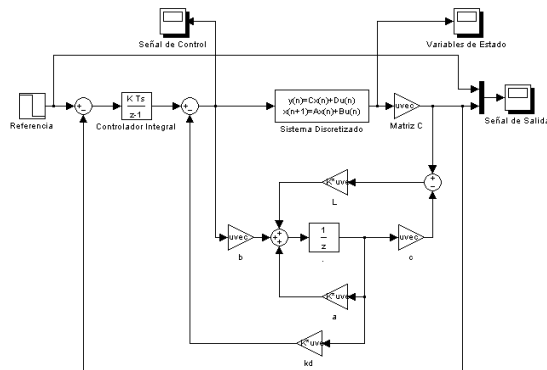


Figura 21. Diseño del controlador óptimo cuadrático en simulink.

2. Resultados del controlador

Al igual que en el controlador predictivo se busca que la señal de salida siga una referencia establecida, para el sistema de estudio definido en las Figuras 8, 9, 10 y 11.

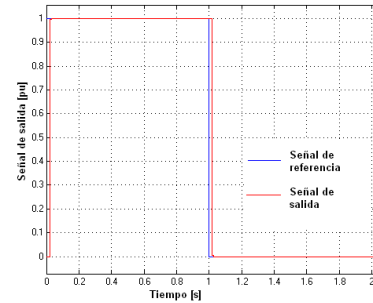


Figura 22. Señal de salida con el controlador LQR.

Además todas las variables de estado deben estar alrededor del punto de operación.

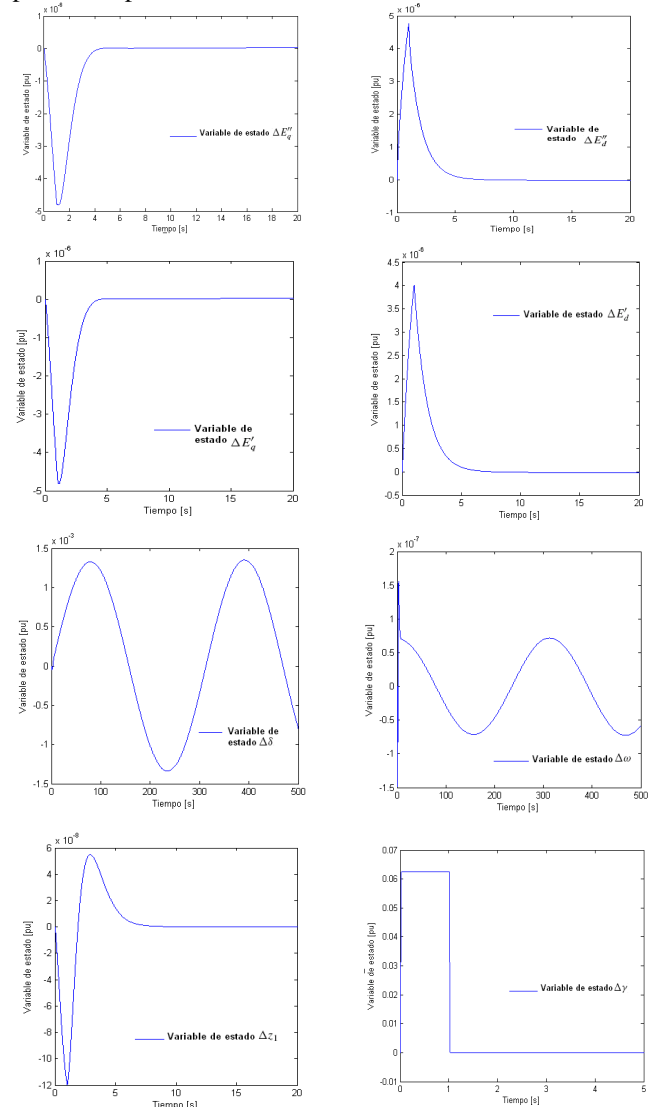


Figura 23. Comportamiento de las variables de estado.

De la Figura 23 se puede observar como las variables de estado oscilan alrededor de valores de 10^{-3} y 10^{-9} , mostrando el buen desempeño que también tiene este controlador.

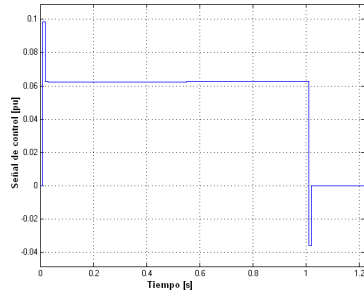


Figura 24. Señal de control con el LQR.

De los resultados obtenidos se puede observar que el desempeño del controlador óptimo cuadrático es muy similar al controlador predictivo, por lo tanto los resultados ante perturbaciones se pueden observar de igual manera en las Figuras 17 a 19.

V. CONCLUSIONES

- El esquema de control desarrollado es apropiado en condiciones desfavorables dadas por variaciones en las tensiones o corrientes, donde el sistema logra alcanzar la referencia en un tiempo apropiado.
- A través del esquema de control propuesto se obtiene un aumento considerable de la amortiguación de la respuesta, lo cual puede considerarse como satisfactorio en el rango de operación del sistema de potencia estudiado.
- La variable de estado $\Delta\delta$ es una de las variables del sistema que presenta mayor amplitud y para este caso en particular no debe tener un valor superior de 45° para evitar la desestabilización del sistema. De los resultados obtenidos se puede observar que esta variable está dentro de este rango, ante perturbaciones o variaciones en las condiciones del sistema.
- La variable de estado $\Delta\gamma$ tiene gran relevancia, ya que representa la componente de cuadratura del transformador cambiador de fase e incorpora el cambio en el ángulo de fase de la tensión en la línea de transmisión.
- Tanto el control predictivo como el control óptimo cuadrático son técnicas que presentan resultados similares, donde el control predictivo permite restringir el funcionamiento del sistema según las condiciones de funcionamiento de la planta.

REFERENCIAS

- [1] Y. H. Song, A. T. Johns, "Flexible ac transmission systems (FACTS)," *IEEE Power and Energy Series 30*, London, United Kingdom, 1999.
- [2] S. Robak, D. D. Rasolomampionona, S. Anwar, "Application of linearized power system model to selection of PST controller input signal," *Electric Power Systems Research*, vol. 78, No. 6, pp. 1008-1018, 2008.
- [3] E. F. Camacho, C. Bordons, *Model Predictive Control*, Springer- Verlag London Limited, 2004.
- [4] E. F. Camacho, C. Bordons, "Control Predictivo: pasado, presente y futuro", Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 2004.
- [5] K. Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, University of Minnesota, Prentice Hall, 1996.
- [6] M. Morari, J. H. Lee, C. E. García, *Model Predictive Control*, 2002.
- [7] A. Bemporad, M. Morari, L. Ricker, *Model Predictive Control Toolbox 3 User's Guide*, MathWorks, 2009.
- [8] E. Peña, A. Pérez, A. J. Miranda, J. H. Sánchez, "Modelado de un reactor químico tipo CSTR y evaluación del control predictivo aplicando Matlab-Simulink," *Revista Ingeniería Universidad de Carabobo*, vol. 15, No. 3, pp. 97-112, 2008.