

# LA EFICIENCIA RELATIVA EN COBERTURA EDUCATIVA DE LOS MUNICIPIOS DEL TOLIMA, APLICANDO EL ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS –DEA- AÑO 2009

## Coverage on efficiency in the municipalities of educational Tolima, envelopment analysis-DEA-data year 2009

### RESUMEN

Este documento presenta los resultados del estudio de analizar la Eficiencia técnica relativa obtenida por los municipios del Tolima en la función de producción de Cobertura Educativa durante el año 2009, empleando el Análisis Envolvente de Datos –DEA-, haciendo uso del modelo BCC-O (orientado a las salidas). Así mismo, se calcula el conjunto de municipios referentes para los municipios ineficientes, y la proporción en que deben aumentar o disminuir sus insumos y/o productos para alcanzar la eficiencia.

**PALABRAS CLAVES:** BCC, CCR, Cobertura educativa, DEA, DMU, Eficiencia relativa, Insumos, Productos.

### ABSTRACT

*This document presents the results of the study to analyze the relative technical efficiency obtained by the municipalities of Tolima in the production function of education coverage during 2009, using the Data Envelopment Analysis-DEA, using the BCC-O model (output-oriented). Likewise, it is estimated the group of municipalities relating to the inefficient municipalities, and the proportion to increase or decrease your input and / or products to achieve efficient.*

**KEYWORDS:** BCC, CCR, DEA, DMU, Educational coverage, Products, relative efficiency, Supplies.

## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo establece el ranking de eficiencia relativa entre los municipios del departamento del Tolima en el área de cobertura educativa para el año 2009, además de identificar los municipios eficientes e ineficientes con sus respectivas mejoras potenciales e identificar los municipios de referencia de cada uno de los municipios ineficientes.

En el documento se muestra la implementación del análisis envolvente de datos con un análisis estadístico básico para poder desechar cualquier error tanto de digitación como de toma de datos. Se aplicaron los modelos CCR-I y BCC-I orientado a las entradas, identificando que hacer con las entradas para que el municipio ineficiente alcance la eficiencia.

Por último se analizaron los resultados del software DEA Solver y se establecieron algunas recomendaciones.

## 2. CONTENIDO

**1) Cobertura educativa.** Por cobertura educativa se entiende la incorporación de población al sistema educativo. Para la producción de cobertura educativa se

### FRANCISCO CHEDIAK

M.sc Investigación de Operaciones y estadística.  
 Profesor de planta  
 Programa de Ingeniería Industrial  
 Universidad de Ibagué  
 kchediak@telecom.com.co

### YURI RODRÍGUEZ PULECIO

Estudiante para grado  
 Ingeniería Industrial  
 Universidad de Ibagué  
 yurirodriguezp@hotmail.com

debe estimar la eficiencia municipal de manera agregada (zonas urbanas y rurales), aunque las condiciones para la prestación del servicio pueden diferir por la dispersión poblacional. En la tabla 1 se presentan los productos y los insumos para estimar la eficiencia en la matrícula educativa [1].

Producto	Insumo
Alumnos matriculados en preescolar, básica y media, en establecimientos educativos oficiales sin subsidio.	<b>Insumo 1</b> Total de docentes oficiales vinculados.
	<b>Insumo 2</b> Inversión (\$) en educación, menos nómina y contratos con oferta privada para los últimos tres años.
	<b>Insumo 3</b> Área disponible en los establecimientos.

Tabla 1. Productos e insumos de la función de cobertura educativa.

El producto lo comprenden los alumnos matriculados en preescolar, básica y media del municipio (zona urbana y

rural) matriculados en establecimientos educativos oficiales.

Los insumos son: Los docentes oficiales, sin incluir docentes con funciones administrativas como el rector, los directores y los coordinadores. La inversión incluye todos aquellos gastos distintos de nómina y corresponden a la construcción, mantenimiento y mejoramiento de la infraestructura, dotación de material didáctico, pago de servicios públicos de las instituciones educativas, transporte escolar, capacitación, sistema de información, alimentación escolar y sin incluir los contratos con oferta privada, para los tres últimos años en pesos constantes del último año de análisis. El tercer insumo corresponde a los metros cuadrados de aula disponibles en el municipio. Esta función no incluye en el producto contratos con oferta privada del sector ofrecido por el municipio en cuanto a cobertura.



Figura 1. Ilustración de los insumos y productos en un municipio o DMU, del inglés Decision Making Unit.[2]

En donde:

$i$  = Insumos  $i$ -ésimo = 1, 2, 3

$j$  = DMU  $j$ -ésima = 1, ..., 47

$r$  = Producto  $r$ -ésimo = 1

**2) Análisis estadístico básico.** La técnica DEA requiere de datos relativamente homogéneos para lograr una estimación consistente de la eficiencia, y para poder controlar la presencia de posibles errores en la fase de introducción de los datos. Según el decreto 3020 expedido en el año 2002, por el cual se establecen los criterios y procedimientos para organizar las plantas de personal docente y administrativo del servicio educativo estatal que prestan las entidades territoriales y se dictan otras disposiciones, se establece que debe haber como máximo 4 estudiantes por  $m^2$  y 50 estudiantes por docente. Todos los municipios cumplieron con la norma y una muestra de ellos se presenta en la tabla 2:

Municipio	Alumnos/ $m^2$	Alumnos/Docente
Fresno	1,13	37
Líbano	0,50	27
Murillo	0,23	19
Roncesvalles	0,59	25

Tabla 2. Análisis estadístico básico, Decreto 3020 de 2002

Con ayuda del software DEA – Solver, se estableció la correlación entre insumos y la correlación entre insumos y productos, se observó que el insumo 1 y el insumo 3 tienen un alto índice de correlación, lo que significa que se puede obviar cualquiera de los dos insumos y no

repercutiría significativamente en el estudio; Además se puede notar que el insumo 2 no tiene una alta correlación con el producto como lo tienen los demás insumos, esto llevaría a pensar que podría existir la posibilidad de cambiar de insumo, sin embargo, se trabajó con todos los insumos establecidos, para dar mayor exactitud a los resultados.

Año 2009	Insumo 1	Insumo 2	Insumo 3	Producto
Insumo 1	1,0000	0,6902	0,9937	0,9992
Insumo 2	0,6902	1,0000	0,6592	0,6867
Insumo 3	0,9937	0,6592	1,0000	0,9933
Producto	0,9992	0,6867	0,9933	1,0000

Tabla 4. Correlaciones entre insumos y productos.

Adicionalmente, Cooper, Seiford y Tone recomiendan que el número de DMUs sea mayor o igual que el máximo entre  $[m*s, 3(m + s)]$ , en donde  $m$  es el número de insumos y  $s$  el número de productos [3]. Para el presente trabajo:  $47 \geq \text{Max} [3, 12]$ ,  $47 \geq 12$  por lo que se concluye que el número de DMU's recomendado debe ser mayor de 12 y disponemos de 47 municipios, muy por encima de lo mínimo recomendado.

Otros datos estadísticos relevantes del análisis básico son:

Año 2009	Insumo 1	Insumo 2	Insumo 3	Producto
Máximo	2.773,00	39.233,35	130.521,00	92.902,00
Mínimo	41,00	545,95	2.219,00	917,00
Rango	2.732,00	38.687,4	128.302,00	91.985,00
Promedio	219,23	4.642,99	9.104,25	6.609,72
Desviación	407,86	7.965,17	19.234,73	13.740,03

Tabla 4. Estadística Básica en Cobertura Educativa

**3) El análisis envolvente de datos –DEA-.** El DEA es una técnica no paramétrica, utilizada para la medición de la eficiencia comparativa de unidades homogéneas, es decir, que tienen una misma finalidad (racionalidad) económica. Partiendo de los insumos y productos, el DEA proporciona un ordenamiento de los municipios otorgándoles una puntuación de eficiencia relativa. De esta forma, los municipios que obtengan el mayor nivel de producto con la menor cantidad de insumos serán los más eficientes del grupo y por tanto, obtendrán los puntajes más altos. El método de estimación DEA evalúa la eficiencia de una unidad tomadora de decisiones (DMU) refiriéndose al “mejor” productor. Considera que una unidad productiva es eficiente, y por tanto pertenece a la frontera de producción, cuando produce más de algún producto sin generar menos del resto y sin consumir más insumos, o bien, cuando utilizando menos de algún insumo, y no más del resto, genere los mismos productos. La idea es comparar cada unidad no eficiente con aquella que lo sea, y a la vez tenga una técnica de producción similar, es decir, que utilice insumos en proporciones similares para producir productos parecidos. La estimación de coeficientes de eficiencia bajo el esquema

de DEA se puede clasificar en dos tipos: El orientado a los insumos y el orientado a los productos. El modelo orientado a los insumos busca la minimización de los insumos para la producción de un nivel dado de producto. Por su parte el modelo orientado a los productos que es el que se va a utilizar, busca la maximización de la producción dadas unas cantidades de insumos.

Charnes, Cooper y Rhodes (1978) proponen un modelo fraccional para medir la eficiencia de las DMUs. Este modelo básico, a partir del cual se sustentan los modelos DEA, consideraba la medida de eficiencia como el cociente entre la suma ponderada de los productos con la de insumos de cada unidad de decisión. El modelo CCR el cual calcula las eficiencias bajo la hipótesis de escala de retorno constante, en este tipo de eficiencia las DMU ineficiente tienen como referencia aquella DMU que tenga la mayor productividad, así no puedan o no tengan los recursos suficientes para ser homogénea con la DMU de referencia, a esta eficiencia se le llama global. [4] Por este motivo se creó un modelo el cual fuera a escala de retorno variable BCC en donde las DMU ineficiente solo se comparan con un DMU eficiente pero de sus mismas características, es decir, homogéneas. Para esto Banker, Charnes y Cooper (BCC) en 1984 añaden al modelo CCR en su forma Dual, la restricción:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

Con estos dos modelos se calculan, la **eficiencia técnica global (ETG)** y la **eficiencia técnica pura (ETP)**, para finalmente calcular la **eficiencia de escala (EE)**, determina que municipios están o no operando en una escala óptima [5].

A continuación se presenta a modo de ejemplo, la formulación para el municipio del guamo.

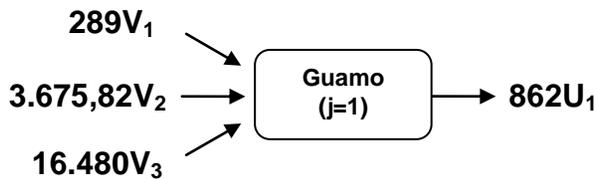


Figura 2. Ilustración del municipio del Guamo con sus insumos y producto.

$$E1 = \frac{8621 U1}{289 V1 + 3675,82 V2 + 16480 V3}$$

El modelo CCR en su forma primal, maximizado las salidas y dejando constantes las entradas es el siguiente [6]:

Maximizar  $Z = 8.621U_1$

Con a las siguientes restricciones:

$$289V_1 + 3.675,82V_2 + 16.480V_3 = 1 \quad (\Phi_1)$$

$$-8.621U_1 + 289V_1 + 3.675,82V_2 + 16.480V_3 \geq 0 \quad (\lambda_1)$$

:  
:

$$-1.586U_1 + 64V_1 + 963V_2 + 2.700V_3 \geq 0 \quad (\lambda_{47})$$

$$U_1 \geq \epsilon \quad (S^+)$$

$$V_1 \geq \epsilon \quad (S_1^-)$$

$$V_2 \geq \epsilon \quad (S_2^-)$$

$$V_3 \geq \epsilon \quad (S_3^-)$$

$$\epsilon \approx 0$$

El modelo dual es:

Minimizar  $Z = \Phi_1 + \epsilon(S^+ + S_1^- + S_2^- + S_3^-)$

Con las siguientes restricciones:

$$-8621\lambda_1 - 1.231\lambda_2 - \dots - 1011\lambda_{46} - 1586\lambda_{47} + S^+ \leq 8.621$$

$$289\Phi_1 + 289\lambda_1 + 54\lambda_2 - \dots + 52\lambda_{46} + 64\lambda_{47} + S_1^- \leq 0$$

$$3.675,82\Phi_1 + 3.675,82\lambda_1 + 1.880,2\lambda_2 - \dots + 963\lambda_{47} + S_2^- \leq 0$$

$$16.480\Phi_1 + 16.480\lambda_1 - \dots - 4.314\lambda_{46} + 2.700\lambda_{47} + S_3^- \leq 0$$

$$\lambda_j \geq 0; j=1, \dots, 47; \quad \Phi_1 \text{ libre}; \quad S^+, S_1^-, S_2^-, S_3^- \geq 0$$

El modelo BCC en su forma dual es:

Minimizar  $Z = \Phi_1 + \epsilon(S^+ + S_1^- + S_2^- + S_3^-)$

Con las siguientes restricciones:

$$-8621\lambda_1 - 1.231\lambda_2 - \dots - 1011\lambda_{46} - 1586\lambda_{47} + S^+ \leq 8.621$$

$$289\Phi_1 + 289\lambda_1 + 54\lambda_2 - \dots + 52\lambda_{46} + 64\lambda_{47} + S_1^- \leq 0$$

$$3.675,82\Phi_1 + 3.675,82\lambda_1 + 1.880,2\lambda_2 - \dots + 963\lambda_{47} + S_2^- \leq 0$$

$$16.480\Phi_1 + 16.480\lambda_1 - \dots - 4.314\lambda_{46} + 2.700\lambda_{47} + S_3^- \leq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{47} = 1$$

$$\lambda_j \geq 0; j=1, \dots, 47; \quad \Phi_1 \text{ libre}; \quad S^+, S_1^-, S_2^-, S_3^- \geq 0$$

Por último, el modelo BCC en su forma primal es:

Maximizar  $Z = 8.621U_1 + K_1$

Con las siguientes restricciones:

$$289V_1 + 3.675,82V_2 + 16.480V_3 = 1 \quad (\Phi_1)$$

$$-8.621U_1 + 289V_1 + 3.675,82V_2 + 16.480V_3 + K_1 \geq 0 \quad (\lambda_1)$$

:  
:

$$-1.586U_1+64V_1+963V_2+2.700V_3+K_{47} \geq 0 \quad (\lambda_{47})$$

$$U_1 \geq \varepsilon \quad (S^+) \quad V_2 \geq \varepsilon \quad (S_2^-) \quad \varepsilon \approx 0, \text{ KJ libre.}$$

$$V_1 \geq \varepsilon \quad (S_1^-) \quad V_3 \geq \varepsilon \quad (S_3^-)$$

Utilizando el software Dea-Solver se obtuvieron los siguientes resultados:

En la tabla 5 se presenta el número de municipios de los que es referente cada municipio eficiente.

Municipio	Frecuencia
Flandes	29
Casabianca	28
Lérida	15
Ibague	9
Rioblanco	7
Suárez	5
Líbano	1
Valle de San Juan	1
Espinal	0
Melgar	0

Tabla 5. Frecuencia de los municipios de referencia.

En cuanto a las mejoras potenciales, a modo de ejemplo, se ilustra los resultados para el municipio del Guamo.

DMU	SCORE	PROYECCIÓN	DIFERENCIA	%
Guamo	0,8974			
Insumo1	289	259,3620	-29,6379	-10,26
Insumo2	3.675,82	3298,8574	-276,9685	-10,26
Insumo3	16.480	9.012,5538	-7.467,4461	-45,31
Producto	8621	8621	0	0

Tabla 6. Mejoras potenciales para el municipio del Guamo.

El municipio del Guamo alcanzó una eficiencia del 89,74%, y está ubicado en el puesto 18 de los 47 municipios, en el año 2009 tuvo 289 docentes en el insumo 1, de los cuales debería haber tenido solo 259,36 es decir, disminuir en un 10,26%; tuvo en inversión 3.675,82 millones de pesos, de los cuales solo deberían haber tenido 3.298,85 millones de pesos disminuyendo este insumo en un 10,26%; del insumo 3 cuenta con 16.480 m<sup>2</sup> en sus instalaciones y debería tener solo 9.012 m<sup>2</sup> para lograr la misma cantidad de producto, es decir, que tiene desaprovechada un 45,31% de sus instalaciones.

Del total de 47 municipios, 10 municipios fueron eficientes y 37 fueron ineficientes, se usaron 3 insumos y 1 producto por municipio, el ranking y la eficiencia se muestra en la tabla 7 en donde se observa que 10 municipios fueron eficientes, 7 municipios obtuvieron una eficiencia entre 91% y el 99%, 14 municipios alcanzaron una eficiencia entre el 81% y el 90%, 15 municipios obtuvieron una eficiencia entre el 71 y el 80% y solo 1 municipio alcanzó una eficiencia entre el 61% y el 70%

Rank	Municipio (DMU)	Eficiencia
1	Valle de San Juan	1
1	Suárez	1
1	Rioblanco	1
1	Melgar	1
1	Líbano	1
1	Lérida	1
1	Ibague	1
1	Flandes	1
1	Espinal	1
1	Casabianca	1
11	Chaparral	0,9970668
12	Fresno	0,98999568
13	Alpujarra	0,98760003
14	Ataco	0,96474860
15	Rovira	0,96445180
16	Coyaima	0,94825631
17	Carmen de Apicalá	0,94425238
18	Guamo	0,89744657
19	Armero	0,89500685
20	Murillo	0,89385419
21	Venadillo	0,89157933
22	San Luis	0,87508295
23	Planadas	0,87049512
24	Piedras	0,86309506
25	Cajamarca	0,85877410
26	Mariquita	0,84284202
27	San Antonio	0,83793290
28	Villarrica	0,82658069
29	Honda	0,82586065
30	Roncesvalles	0,82430737
31	Ambalema	0,82123231
32	Saldaña	0,80880923
33	Prado	0,80440765
34	Natagaima	0,77840580
35	Palocabildo	0,77565068
36	Coello	0,76373636
37	Cunday	0,76262866
38	Herveo	0,75309940
39	Anzoátegui	0,75021323
40	Villahermosa	0,75000918
41	Dolores	0,73206166
42	Iconozo	0,72774766
43	Ortega	0,71681067
44	Falan	0,71434599
45	Purificación	0,71343574
46	Alvarado	0,71068104
47	Santa Isabel	0,69335899

Tabla 7. Ranking y eficiencia de los municipios del Tolima.

En cuanto al rendimiento de escala, 31 municipios (65,95%) obtuvieron una escala de rendimiento creciente (IRS), 3 municipios (6,97%) tuvieron una escala de rendimiento constante (CRS) y 13 municipios (27,65%) lograron una escala de rendimiento decreciente.

Diciembre de 2008, Trabajo de Grado para optar el título de Magíster en Investigación De Operaciones y Estadística.

### 3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los 10 municipios que alcanzaron la más alta puntuación, es decir una eficiencia del 100%, para el año 2009 fueron: el municipio de Valle de San Juan, Suarez, Rioblanco, Melgar, Líbano, Lérida, Ibagué, Flandes, Espinal y Casabianca, se destacaron por presentar buenos resultados en cuanto a su manejo y administración de sus recursos.

Los 5 municipios que alcanzaron la más baja puntuación para el año 2009 fueron Ortega (71,68%), Falan (71,43%), Purificación (71,34%), Alvarado (71,06%) y Santa Isabel (69,33%), estos municipios necesitan de más supervisión por parte de las entidades encargadas, tanto en el monto de recursos a asignar como en la forma de utilizarlos, acorde con las mejoras potenciales y a sus municipios de referencia.

Se observó que los municipios de Rioblanco, Lérida y Flandes tuvieron una eficiencia de escala (EE) del 100%, es decir, que son eficientes bajo los dos tipos de modelo, por lo tanto, por cada punto porcentual de incremento en el recurso, estos municipios alcanzan un aumento mayor al punto porcentual incrementado.

### 4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Departamento Nacional de Planeación, “Metodología para la medición y análisis del desempeño municipal”, Mayo 2005 pp. 37-51, pp. 37-39

[2] M. C. Angulo y C. C. Bernal, “La eficiencia relativa en educación de los municipios de Colombia aplicando el análisis envolvente de datos- DEA años 2007 y 2008”. Universidad de Ibagué, Ingeniería Industrial, Oct. 2010.

[3] W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone, “Data Envelopment Analysis”, Kluwer Academic Publishers, 2004

[4] G. Y. Barrios. “La medición de la eficiencia técnica mediante el Análisis Envolvente de Datos”. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Oct. 2007. <http://www.eumed.net/ce/2007c/gybc-a.htm>

[5] J. A. Soto, “Análisis Envolvente de Datos, Fundamentos Teóricos y Prácticos”, UTP, 2007

[6] CH. P. FRANCISCO; “La Técnica DEA para medir y analizar la eficiencia. Municipios del departamento del Tolima, 2006”. Universidad Tecnológica de Pereira,